



Lignes de partage des eaux discrètes : théorie et application à la segmentation d'images cardiaques

Jean Cousty

► To cite this version:

Jean Cousty. Lignes de partage des eaux discrètes : théorie et application à la segmentation d'images cardiaques. Informatique [cs]. Université de Marne la Vallée, 2007. Français. NNT: . tel-00321885

HAL Id: tel-00321885

<https://theses.hal.science/tel-00321885>

Submitted on 16 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Marne-La-Vallée

Ecole Doctorale ICMS

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Marne-la-Vallée

spécialité informatique

présentée et soutenue publiquement par

JEAN COUSTY

le 17 octobre 2007

Lignes de partage des eaux discrètes : théorie et application à la
segmentation d'images cardiaques

Discrete watersheds: theory and applications to cardiac image
segmentation

Directeur de thèse

LAURENT NAJMAN

Composition du jury

Président : F. MEYER, Professeur, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

Rapporteurs : G. MALANDAIN, Directeur de recherche, INRIA, Sophia-Antipolis
J.B.T.M. ROERDINK, Professeur, Université de Groningue, Pays-Bas

Examineurs : G. BERTRAND, Professeur, Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electronique et
Electrotechnique, Noisy-le-Grand
P. CLARYSSE, Chargé de recherche, CNRS, Lyon
M. CROCHEMORE, Professeur des Universités, Université de Marne-la-Vallée
J. GAROT, Professeur, CHU Henri Mondor, Créteil
L. NAJMAN, Professeur, Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electronique et
Electrotechnique, Noisy-le-Grand
R. VAILLANT, Ingénieur de recherche, GE Healthcare, Buc

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Grégoire Malandain et Jos Roerdink qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteur de mon manuscrit de thèse.

J'exprime ma reconnaissance aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer les travaux présentés dans ce manuscrit.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Gilles Bertrand, Michel Couprie et Laurent Najman qui m'ont encadré pendant trois ans dans une atmosphère amicale propice à une recherche enjouée.

Gilles Bertrand, qui m'a insufflé à travers les cours dispensés à l'ESIEE le goût des mathématiques discrètes, a encouragé mon travail de recherche depuis ses balbutiements. Il a ensuite donné de nombreuses impulsions à ma thèse. Je lui dois beaucoup.

Je remercie Michel Couprie pour sa disponibilité de tout instant et pour la pédagogie dont il a fait preuve à mon égard, en particulier, lors de nos nombreuses séances de relectures de preuves. Il m'a aguerri à ce jeu d'esprit.

Laurent Najman a su diriger ma thèse tout en me laissant suffisamment d'autonomie. Je le remercie pour son sens de la communication tant dans la rédaction d'articles scientifiques que dans sa gestion des ressources humaines. Il m'a, dans ce domaine, montré la voie à suivre.

Je remercie vivement Jérôme Garot de croire si fortement à la collaboration entre ingénieurs et médecins. Il a permis à deux cardiologues, Stéphanie Clément-Guinaudeau et Thomas Goissen, d'effectuer leur stage de DEA en collaboration avec le laboratoire A2SI. Leurs apports dans le travail applicatif présenté ici tient une place prépondérante.

J'ai une pensée particulière pour l'improbable Sophie qui anima plus d'un repas à l'ESIEE et fut le sujet de l'intégralité des communications publiées dans la série LNCS – LA2SI Non-Comprehensive Statistics. A travers elle, je veux remercier ceux qui lui ont permis de voir le jour : l'ensemble des doctorants, enseignants et chercheurs du laboratoire A2SI à l'ESIEE.

Enfin, pour tout le reste, je remercie mes proches, famille et amis, pour l'affection quotidienne dont ils m'entourent.

Table des matières

Table des figures	vii
-------------------	-----

Introduction	1
--------------	---

1 Préambule : graphes, clivages et lignes de partage des eaux

1.1 Graphes	7
1.2 Clivages	11
1.3 Lignes de partage des eaux d'un graphe à sommets valués	12
1.3.1 Fonctions numériques discrètes	14
1.3.2 Lignes de partage des eaux par inondation	14
1.3.3 Lignes de partage des eaux par distance topographique	16
1.3.4 Lignes de partage des eaux inter-pixel (par inondation)	17
1.3.5 Lignes de partage des eaux topologiques	18
1.3.6 Classification des lignes de partage des eaux	24

2 Graphes de fusion : clivages et propriétés de la fusion de régions

2.1 Introduction	27
2.2 Ensembles minces et graphes d'arêtes	29
2.3 Fusion de régions	32
2.4 Graphes de fusion	33
2.5 Caractérisations locales	36
2.6 Grilles d'adjacence usuelles en analyse d'image	37
2.7 Grille de fusion parfaite	39
2.8 Conclusions	43

3 Graphes de fusion : ligne de partage des eaux et fusion de régions

3.1 Introduction	45
3.2 Minceur des LPE topologiques	47
3.3 C-LPE dans les graphes de fusion parfaits	49

3.4	LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits	53
3.5	Perspectives : schémas hiérarchiques dans les grilles de fusion parfaites	54

4 Lignes de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées

4.1	Introduction	57
4.2	Graphes à arêtes valuées	59
4.3	Lignes de partage des eaux	59
4.3.1	Extensions et coupures dans les graphes	59
4.3.2	LPE par le principe de la goutte d'eau	61
4.3.3	Bassins d'attraction par une propriété de plus grande pente	62
4.4	Forêts couvrantes de poids minimum	62
4.5	Amincissements optimaux	64
4.5.1	Amincissement par bord et LPE	64
4.5.2	Algorithme linéaire de coupure par M-bord	67
4.6	Flux et algorithme de LPE linéaire	70
4.7	Coupures par LPE, forêts de plus courts chemins et LPE topologiques	72
4.7.1	Valeur de connexion	73
4.7.2	Forêts de plus courts chemins	74
4.7.3	LPE topologiques	75
4.8	Illustrations et résultats expérimentaux	77
4.8.1	Segmentation en k régions	77
4.8.2	Procédure semi-automatique de segmentation	80
4.8.3	Temps d'exécution de quelques algorithmes de LPE	80
4.9	Conclusions	80
4.10	Annexe du Chapitre 4 : algorithme récursif de coupure par flux	81

5 Segmentation cardiaque spatio-temporelle

5.1	Introduction	85
5.2	Que segmenter ?	86
5.2.1	Topologie	86
5.2.2	Géométrie	86
5.2.3	Intensité	87
5.3	Comment segmenter ?	87
5.3.1	Frontière endocardique	87
5.3.2	Frontière épocardique	88
5.4	Données expérimentales	90
5.4.1	Images	90

5.4.2	Segmentations manuelles	91
5.4.3	Segmentations automatiques	91
5.5	Résultats expérimentaux	93
5.5.1	Précision des contours	93
5.5.2	Paramètres critiques du diagnostic cardiaque	94
5.5.3	Cohérence temporelle	95
5.5.4	Robustesse	96
5.6	Conclusions	96
Pour conclure		97
1	Résumé des contributions	97
1.1	Classification de quelques approches discrètes de ligne de partage de eaux	97
1.2	Graphes de fusion : clivages et propriétés de la fusion de régions	97
1.3	Graphes de fusion : lignes de partage des eaux et fusion de régions	99
1.4	Ligne de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées	101
1.5	Segmentation d'images cardiaques spatio-temporelles	103
2	Perspectives	104
2.1	Arbres de poids minimum par ligne de partage des eaux	104
2.2	Lignes de partage des eaux dans les complexes	104
2.3	Lignes de partage des eaux hiérarchiques : saillance des contours	107
2.4	Analyse d'images médicales	109

Annexes	111
A Fusion graphs : merging properties and watersheds	111
B Weighted fusion graphs : merging properties and watersheds	145
C Watersheds, minimum spanning forests and the drop of water principle	173
D Automated, accurate and fast segmentation of 4D cardiac cine-MR images	219
 Bibliographie	 251
Index	259

Table des figures

1	Image et représentation tridimensionnelle du ventricule gauche cardiaque.	2
2	Exemple de segmentation d'image : délinéation puis reconnaissance.	3
3	Exemple de segmentation d'image : reconnaissance puis délinéation.	4
1.1	Un graphe.	8
1.2	Relations d'adjacence usuelles en analyse d'image.	9
1.3	W-amincissements ensemblistes et clivages.	11
1.4	Illustration introductive à la ligne de partage des eaux en segmentation d'image.	13
1.5	Graphe à sommets valués, sections inférieures et minima.	14
1.6	Exemple de LPE par inondation d'une image.	15
1.7	Ligne de partage des eaux topographique.	17
1.8	Ligne de partage des eaux inter-pixel (par inondation).	18
1.9	LPE topologique d'un graphe à sommets valués.	20
1.10	Exemple de LPE topologique d'une image.	21
1.11	Lignes de partage des eaux topologiques d'une image réelle.	23
1.12	Contre-exemple utilisé dans la classification des LPE.	25
2.1	Introduction aux problèmes liés à la fusion de régions.	28
2.2	Clivages minces et non-minces.	30
2.3	Graphe d'arêtes.	31
2.4	Graphes permettant de caractériser les graphes d'arêtes.	31
2.5	Fusion.	32
2.6	Exemples et contre-exemples des différentes classes de graphes de fusion.	34
2.7	Division de région.	36
2.8	Propriétés de fusion dans les grilles bidimensionnelles usuelles.	39
2.9	Contre-exemple pour la propriété de fusion de E_3^3	40
2.10	Fusion de régions dans une grille de fusion parfaite.	40
2.11	Les deux grilles de fusion parfaites sur \mathbb{Z}^2	41
2.12	Une grille de fusion parfaite tridimensionnelle.	42
3.1	LPE topologique épaisse d'une image équipée de la 8-adjacence.	47
3.2	Graphe n'admettant que des LPE topologiques minces.	48
3.3	C-LPE dans un graphe de fusion parfait.	49
3.4	Le graphe G^λ utilisé dans le Théorème 57.	53
3.5	Fusion de régions reposant sur la LPE dans les grilles de fusion parfaites.	55
4.1	Extension dans un graphe.	60
4.2	LPE dans un graphe à arêtes valuées.	61

4.3	Forêts couvrantes de poids minimum relatives.	64
4.4	Configurations locales dans un graphe à arêtes valuées.	65
4.5	Amincissements et noyaux par bord.	66
4.6	Forêts de plus courts chemins.	74
4.7	LPE et graphes d'arêtes.	76
4.8	Coupure par LPE appliquée à une image réelle.	79
4.9	LPE à partir de marqueurs sur une image réelle.	81
4.10	Temps d'exécution de quatre algorithmes de LPE.	82
4.11	Résumé des propriétés des LPE sur les arêtes.	82
5.1	Objet d'intérêt en imagerie cardiaque ventriculaire gauche.	86
5.2	Exemple de segmentation obtenue par la méthode automatique.	92
5.3	Illustration de la cohérence temporelle obtenue par la méthode 4D.	95
5.4	Mesures de la cohérence temporelle pour les variantes 3D et 4D.	95
5	Fusion de régions.	98
6	Lignes de partage des eaux topologiques épaisses et minces.	100
7	Illustration sur une image de différentes méthodes de ligne de partage des eaux.	102
8	Exemple de segmentation du myocarde ventriculaire gauche.	103
9	Ligne de partage des eaux dans un complexe cubique 2D.	105
10	Segmentation de la surface d'une statue.	106
11	Saillance des contours.	108

Introduction

Analyser une image consiste à en extraire des informations caractéristiques relatives aux objets d'intérêt qui sont présents dans son champ de vue. Il s'agit par exemple, à partir d'images microscopiques, d'étudier le nombre, la répartition, la forme ou la taille des particules visibles.

En tant que domaine scientifique, l'analyse d'image est apparue avec les premiers dispositifs d'acquisition d'images et suit depuis leurs développements. A la fin des années 60, l'essor de l'informatique et avec lui la prolifération d'images digitales ou discrètes – c'est-à-dire des ensembles finis de points lumineux (pixels) alignés sur une grille – ont donné naissance [3] aux problématiques modernes de la discipline : analyser automatiquement ou semi-automatiquement, par ordinateur, ces images digitales.

Conjointement aux progrès de l'informatique, l'étude de la tomographie [24] a permis l'apparition des premiers systèmes [29] pour construire des images tridimensionnelles (3D). Elles renseignent sur les propriétés physiques de l'intérieur des objets imagés sans avoir à les découper (voir par exemple trois vues en coupe d'une image 3D de cœur dans la Figure 1a). Les champs d'application de l'imagerie 3D sont nombreux. On peut citer bien évidemment l'imagerie médicale mais également l'étude des matériaux physiques, comme par exemple, l'étude de la structure de la mousse de polyuréthane [39, 44].

Aujourd'hui, les progrès dans le domaine de l'imagerie permettent d'obtenir des séquences d'images tridimensionnelles acquises successivement au cours du temps. Ce type d'images prend tout son intérêt pour l'analyse des objets en mouvement, comme par exemple l'étude de la dynamique du cœur qui est l'objet de la partie applicative de cette thèse. Cependant, la quantité importante de données rend la tâche difficile et fastidieuse pour un opérateur humain. De plus, leur visualisation sur un écran d'ordinateur ne peut s'effectuer qu'à partir d'images planes. De ce fait, appréhender la géométrie 3D et le mouvement des objets d'intérêt est difficile sans recourir à une assistance informatique. Par exemple, comment transformer l'image cardiaque de la Figure 1a en un modèle géométrique permettant une visualisation tridimensionnelle telle que celle de la Figure 1b ? Le sujet de cette thèse est précisément l'étude d'outils mathématiques pour mettre en œuvre des procédures informatiques d'analyse et de visualisation de séquences temporelles constituées d'une suite d'images cardiaques tridimensionnelles acquises au cours du cycle cardiaque.

Dans les processus d'analyse d'images, l'étape cruciale est la *segmentation*, c'est-à-dire la localisation spatiale des objets d'intérêt qui pourraient apparaître dans l'image. Par exemple, si l'on veut quantifier précisément, à partir d'images acquises par un scanner, le volume d'une cavité cardiaque, la première étape consiste, en général, à délimiter cette zone ou, formulé différemment, à déterminer les pixels qui lui appartiennent et ceux qui ne lui appartiennent pas.

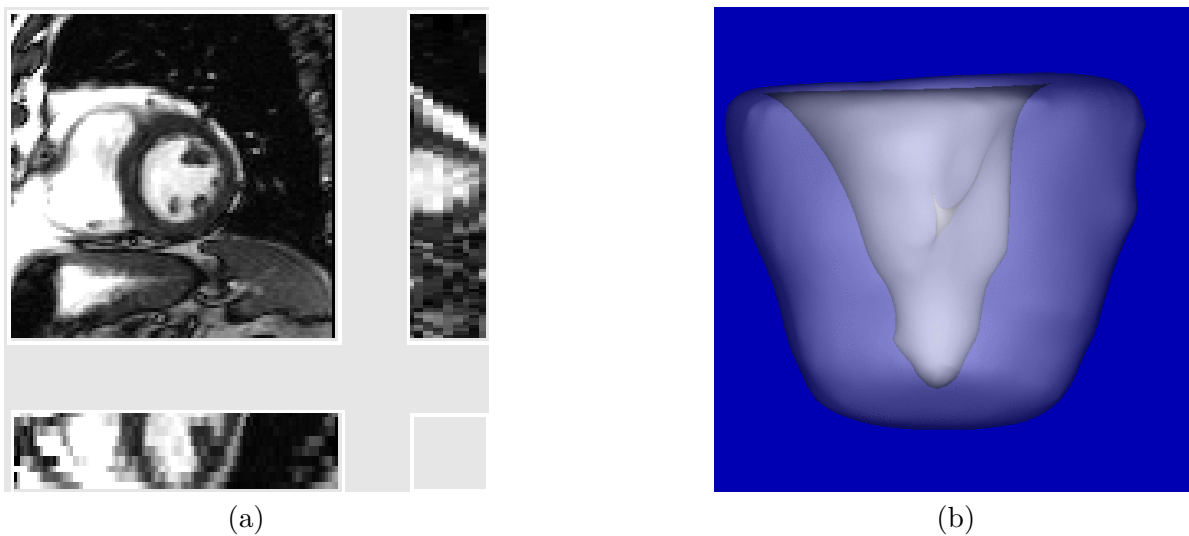


FIG. 1 – Image et représentation tridimensionnelle du ventricule gauche cardiaque. (a), Trois coupes orthogonales d’une image cardiaque tridimensionnelle; (b) un rendu géométrique 3D, en transparence, du myocarde ventriculaire gauche.

Une fois cette région segmentée, il est facile de compter le nombre de pixels qui lui appartiennent et ainsi d’en déduire son volume.

Pour segmenter une image, les systèmes de vision – aussi bien informatiques qu’humains – réalisent deux tâches à la fois : la *reconnaissance* des objets d’intérêt et la *délinéation* précise de leurs contours [58, 75]. Ces deux tâches sont étroitement liées et forment, à première vue, un cercle vicieux. En effet, pour reconnaître un objet dans une image, il faut avoir déterminé son contour et pour déterminer le contour d’un objet il faut l’avoir au préalable reconnu. Ainsi, il est utopiste de vouloir définir une procédure universelle et complètement automatique pour segmenter les images. En général, il n’est même pas assuré de pouvoir trouver une approche automatique pour résoudre un problème particulier. Les cas pratiques où cela est possible se réduisent souvent aux segmentations d’un nombre limité d’objets possédant des caractéristiques discriminantes a priori.

Une première approche de la segmentation par ordinateur consiste à effectuer en même temps reconnaissance et délinéation. Il s’agit, par exemple, de rechercher un contour optimal vis-à-vis d’un critère dépendant, d’une part, d’un modèle de l’objet recherché (reconnaissance) et, d’autre part, du contraste sur le contour (délinéation). Une méthode populaire (voir, par exemple, [76, 59]), pour déterminer l’optimum, consiste à déformer progressivement un contour initial jusqu’à ce que le critère ne puisse plus être amélioré par une déformation simple. Ce type de méthode est utilisé avec succès dans de nombreuses applications. Cependant, lorsque des critères complexes sont employés, il est difficile de garantir que l’optimum global est atteint. En particulier, le processus de déformation peut être stoppé par un optimum local. Le contour ainsi obtenu ne correspond pas nécessairement à l’objet recherché.

Une autre approche consiste, au contraire, à procéder étape par étape : reconnaissance et délinéation sont effectuées successivement, dans un ordre ou l’autre. Dans ce cas, la délinéation

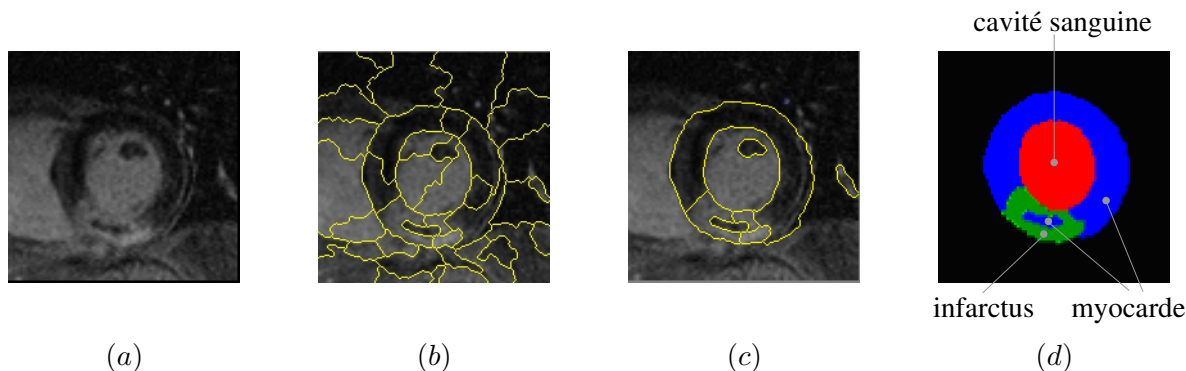


FIG. 2 – Exemple de segmentation d’image : délinéation puis reconnaissance.
 (a), Image par résonance magnétique cardiaque (rehaussement tardif) ; (b), délinéation : la séparation entre régions est obtenue par ligne de partage des eaux ; (c), reconnaissance : la séparation est obtenue après plusieurs étapes de fusion régions ; (d) : résultat du processus de segmentation.

est un processus “mécanique” qui cherche des contours dans les zones de fort contraste sans prendre en compte la sémantique des objets définis. La partie “intelligente” de la segmentation, qui consiste à interpréter le contenu de l’image, est laissée au soin d’une procédure de reconnaissance. Si la délinéation est effectuée d’abord, la reconnaissance consistera, par exemple, à sélectionner, parmi un ensemble de contours possibles issus de la délinéation, les morceaux de courbes significatifs pour une application particulière. Si, au contraire, la reconnaissance est effectuée d’abord, la délinéation se limitera à la recherche de contours dans des zones préalablement reconnues comme particulièrement intéressantes pour une application donnée. En général, les êtres humains sont meilleurs et plus rapides que les ordinateurs dans les tâches de reconnaissance alors que les ordinateurs effectuent plus rapidement et plus précisément les tâches de délinéation. Ainsi, séparer ces deux tâches offre une grande flexibilité. En particulier, l’interaction entre un opérateur humain et un ordinateur coule de source. La reconnaissance est dévolue au premier, la délinéation au second.

Illustrons ces deux schémas (délinéation puis reconnaissance et reconnaissance puis délinéation) par deux problèmes pratiques. L’imagerie cardiaque par résonance magnétique fournit, entre autres, des images fixes qui permettent de visualiser à la fois le myocarde, l’infarctus le cas échéant, et la cavité sanguine (voir Figure 2a). L’intérêt diagnostique lié à la quantification du volume de ces trois objets est immédiat. C. Doublier a proposé en 2003 un logiciel interactif [108] pour segmenter ces trois objets. Dans une première étape (délinéation), une frontière déduite du contraste de l’image est calculée : cette segmentation initiale contient de trop nombreuses régions (Figure 2b). Dans une seconde étape (reconnaissance), l’utilisateur choisit des paires de régions voisines (Figure 2c) qui appartiennent à un même objet d’intérêt et doivent être fusionnées. Le processus s’arrête lorsque l’opérateur humain juge que la segmentation correspond aux objets d’intérêt (Figure 2d).

Pour illustrer la démarche inverse qui consiste à reconnaître avant de délimiter, considérons le problème suivant de retouche photographique. Supposons que l’on souhaite camoufler le visage de la jeune femme Figure 3a tout en conservant une netteté parfaite pour les autres objets – et

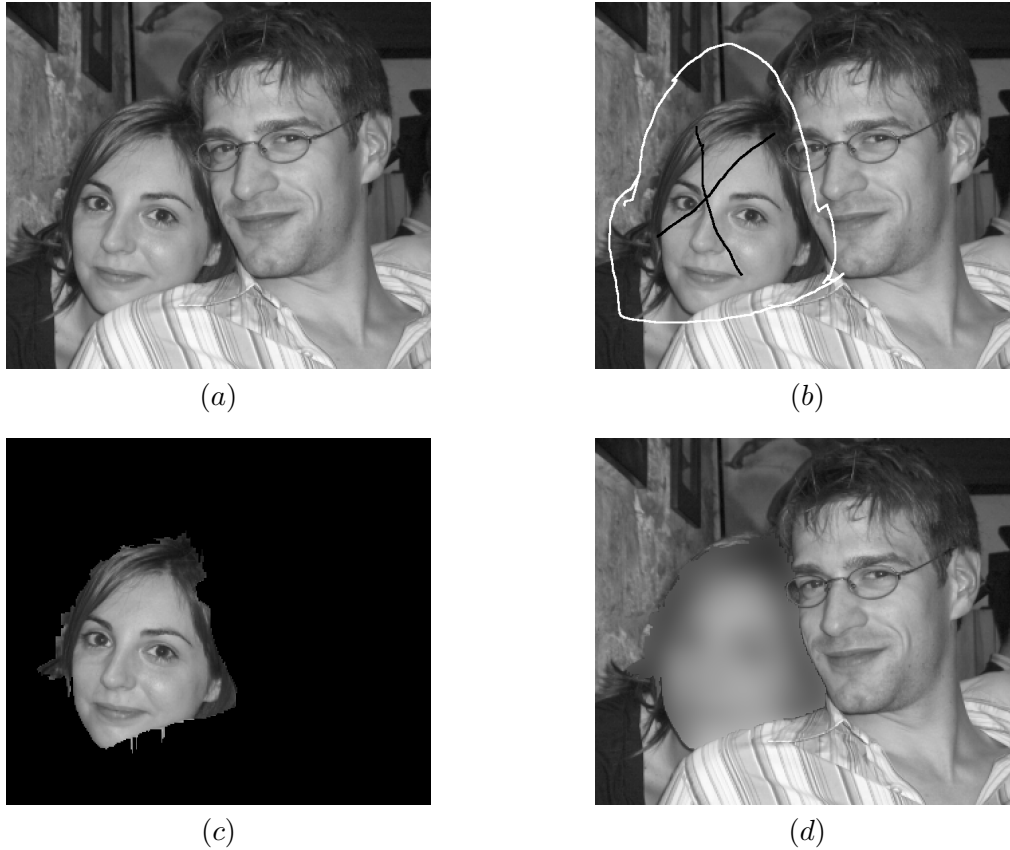


FIG. 3 – Exemple de segmentation d'image : reconnaissance puis délinéation.

(a), Photographie originale ; (b), reconnaissance : en noir un marqueur pour le visage de la jeune fille, en blanc un marqueur pour le fond ; (c), segmentation du visage de la jeune fille ; (d), la jeune fille est rendu anonyme.

en particulier pour le jeune homme. Avant tout, le visage de la jeune fille doit être segmenté afin de lui appliquer un traitement spécifique. Pour cela, l'utilisateur reconnaît, en indiquant par exemple par des traits, les objets qu'il souhaite segmenter. Dans cet exemple, le visage et le fond sont marqués (Figure 3b). Ensuite, un algorithme de délinéation trouve le meilleur contour séparant les zones marquées (Figure 3c). Finalement, le visage de la jeune fille est rendu trouble avant d'être ré-incrusté dans l'image originale (Figure 3d).

La *ligne de partage des eaux* (LPE), introduite par H. Digabel et C. Lantuéjoul [93] pour l'analyse d'image, est l'une des méthodes les plus puissantes et rapides pour réaliser les étapes de délinéation dans les chaînes de segmentation d'image. En informatique, cette notion peut être étudiée dans le cadre de la *connexité discrète (digitale)* [36, 49, 67] : c'est-à-dire l'étude des structures et des propriétés qui permettent d'organiser un ensemble fini de points (pouvant être munis ou non d'une information d'intensité comme dans le cas d'une image) en un certain nombre de régions. Dans ce cadre, la LPE permet de partitionner les pixels d'une image en un ensemble de régions connexes séparées par un contour fermé. Elle constitue donc, par nature, un outil bien adapté à la segmentation. Par exemple, dans les deux illustrations précédentes, la délinéation est réalisée par une LPE.

La *morphologie mathématique* [5, 8, 10, 11, 12, 15, 17] est une spécialité de l'analyse d'images qui consiste à analyser un ensemble de pixels, ou plus généralement une image, à travers son interaction avec des formes plus simples, appelées éléments structurants, dont la géométrie est maîtrisée. Les opérateurs morphologiques permettent, par exemple, de sélectionner des groupes de pixels en fonction de certains attributs comme par exemple leur forme, leur taille ou leur contraste. Ils constituent donc un ensemble d'outils puissants pour reconnaître des régions pertinentes pour ces critères. Une méthodologie classique de segmentation issue de la morphologie mathématique [41, 58] consiste à utiliser ces opérateurs pour la reconnaissance et la LPE pour la délimitation. Illustrons, tout d'abord, cette démarche avec l'application précédente dans laquelle des régions voisines sont reconnues par un utilisateur en vue de leur fusion. La sélection manuelle des régions à fusionner pourrait, par exemple, être remplacée par la sélection automatique des régions les moins significatives pour des critères morphologiques. Dans la seconde illustration, la sélection manuelle de marqueurs pourrait également être réalisée grâce à des outils morphologiques. Il s'agirait, par exemple, pour reconnaître les visages, de détecter les régions claires de forme ovale.

Cette thèse s'intéresse à la fois aux aspects théoriques liés aux méthodes de segmentation reposant sur la LPE et à leur application pratique pour l'analyse de séquences d'images cardiaques tridimensionnelles. Il nous semble, d'une part, primordial de définir en termes rigoureux les opérations utilisées afin d'étudier leurs propriétés mathématiques et ainsi d'en garantir la robustesse dans les applications. D'autre part, la mise en œuvre pratique de ces opérations nécessite l'introduction d'algorithmes de calcul dont il est possible de prouver qu'ils fournissent le résultat attendu. De plus, compte tenu de la quantité de données mise en jeu dans les applications (plusieurs millions de voxels dans les séquences d'images cardiaques), l'étude systématique de leur complexité de calcul est une étape nécessaire pour déterminer leur viabilité pratique. Cette thèse, dont le plan est détaillé ci-après, s'organise donc en deux parties principales : la première est dévolue à l'étude théorique (définition, propriétés et algorithmes) de la ligne de partage des eaux et la seconde s'intéresse à sa mise en œuvre pour analyser des images cardiaques.

Le Chapitre 1 présente, dans le cadre de la théorie des graphes, la notion de *connexité discrète* la plus utilisée en analyse d'image. Nous en dérivons une définition de *clivage* qui formalise l'idée d'ensemble frontière, comme ceux produits par la plupart des algorithmes de LPE. Ensuite, les approches les plus populaires de la LPE sont passées en revue et classifiées en fonction de propriétés qui nous semblent fondamentales. Aucune des approches présentées ne vérifient toutes les propriétés désirables.

Le Chapitre 2 propose un cadre mathématique pour l'étude des méthodes de fusion de régions dans les graphes. Fusionner deux et uniquement deux régions pose certains problèmes. Nous introduisons quatre classes de graphes (de fusion) dans lesquels certaines de ces difficultés ne peuvent jamais survenir. Nous démontrons que l'une de ces classes est précisément celle pour laquelle tout clivage est mince. Nous introduisons ensuite une nouvelle relation d'adjacence pour des images de dimension quelconque (\mathbb{Z}^n), appelée grille de fusion parfaite, dans laquelle deux régions voisines peuvent être fusionnées, sans effet de bord induit par la fusion d'une troisième région, en supprimant de la frontière l'ensemble des points adjacents à ces deux régions.

Le Chapitre 3 est consacré à la *ligne de partage des eaux topologique* [104, 71] dans les graphes de fusion parfaits. La LPE topologique étend la notion de clivage aux graphes dont les sommets

sont valués et permet de segmenter une image. Nous étendons les propriétés des clivages dans les graphes de fusion aux cas des fonctions et montrons que cette notion de LPE satisfait la plupart des propriétés présentées dans le Chapitre 1. Un algorithme d'inondation monotone et linéaire est proposé pour le calcul des LPE dans les grilles de fusion parfaites. Grâce aux graphes d'arêtes, une notion classique en théorie des graphes, nous prouvons que les propriétés des LPE dans les grilles de fusion parfaites peuvent être étendues aux graphes à arêtes valuées.

Le Chapitre 4 est consacré à l'étude en profondeur des LPE dans les graphes à arêtes valuées. Les LPE peuvent y être définies en suivant l'idée intuitive de gouttes d'eau s'écoulant sur un relief topographique. Nous établissons la consistance de cette définition vis-à-vis des propriétés présentées dans le Chapitre 1 et démontrons son principe d'optimalité. De plus, nous proposons deux algorithmes linéaires qui, à notre connaissance, sont les plus efficaces, à la fois en théorie et en pratique, pour le calcul des LPE.

En nous reposant sur ces résultats théoriques, nous proposons, dans le Chapitre 5, un logiciel pour la segmentation automatique du ventricule gauche dans des images cardiaques spatio-temporelles par résonance magnétique. La méthode repose, d'une part, sur la LPE dans les graphes à arêtes valuées et, d'autre part, sur des outils classiques de la morphologie mathématique. Cette procédure est validée par comparaison avec des segmentations manuelles tracées par deux experts cardiologues sur des images provenant d'une vingtaine de patients porteurs de diverses cardiopathologies.

Chapitre 1

Préambule : graphes, clivages et lignes de partage des eaux

1.1 Graphes

Segmenter une image consiste à en extraire des “régions” possédant des caractéristiques intéressantes vis-à-vis d’une application pratique. La notion de connexité est essentielle pour définir une région. L’objectif de cette première section est d’introduire les notions élémentaires de théorie des graphes qui fournissent, en particulier, les outils pour appréhender la connexité dans les ensembles discrets.

Notations ensemblistes. Soit V un ensemble fini, le cardinal de V , noté $|V|$, est le nombre d’éléments de V . Soit V' un deuxième ensemble, V' est inclus dans V , noté $V' \subseteq V$, si tout élément de V' est aussi un élément de V . Dans ce cas, on dit que V' est une partie ou un sous-ensemble de V . Si $V' \subseteq V$ et $V' \neq V$, on dit que V' est un sous-ensemble strict de V et on écrit $V' \subset V$. On désigne par 2^V , l’ensemble de toutes les parties de V . L’union de V et V' , notée $V \cup V'$, est l’ensemble formé des éléments de V et de V' . L’intersection de V et V' , notée $V \cap V'$, est l’ensemble des éléments qui sont à la fois dans V et dans V' . La différence (ensembliste) de V et V' , notée $V \setminus V'$, est l’ensemble des éléments de V qui n’appartiennent pas à V' . Enfin, si $V' \subseteq V$, le complémentaire de V' dans V , noté $\overline{V'}^V$ est l’ensemble $V \setminus V'$.

Graphes. Un *graphe* est un couple $X = (V(X), E(X))$ composé d’un ensemble fini $V(X)$ et d’un ensemble $E(X)$ de paires non-ordonnées d’éléments de $V(X)$, i.e., $E(X)$ est un sous-ensemble de $V(X) \otimes V(X) = \{\{x, y\} \subseteq V(X) \mid x \neq y\}$. Tout élément de $V(X)$ est appelé *sommet* ou *point* (de X), et tout élément de $E(X)$ est appelé *arête* (de X). Si $V(X) \neq \emptyset$, on dit que X est *non-vide*.

Soit X un graphe. On considère également l’application Γ_X^* , de $V(X)$ dans l’ensemble des parties de $V(X)$, qui associe à tout sommet x de X l’ensemble de ses *voisins* : $\Gamma_X^*(x) = \{y \in V(X) \mid \{x, y\} \in E(X)\}$. De plus, pour tout sommet x de G , on désigne par $\Gamma_X(x)$ l’ensemble $\Gamma(x) \cup \{x\}$. Soient x et y deux sommets de X . Si $y \in \Gamma_X^*(x)$, on dit que x et y sont *adjacents* (pour X).

La figure suivante (Figure 1.1) montre un exemple de graphe X . Les sommets sont représentés par des cercles et les arêtes par des segments reliant deux sommets. L’ensemble de sommets de X

est : $V(X) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$; l'ensemble $E(X)$ des arêtes de X est :
 $\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{d, e\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{e, i\}, \{g, h\}, \{g, i\}, \{f, j\}, \{f, k\}, \{j, k\}\}$.
 Le sommet a est adjacent à b et $\Gamma_X^*(a) = \{b, e\}$.

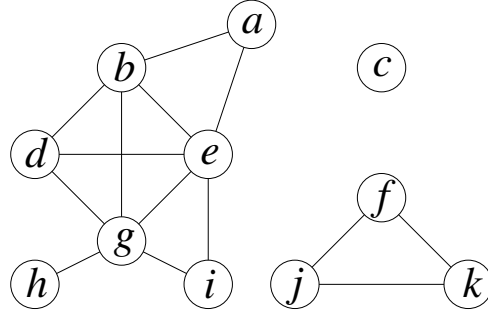


FIG. 1.1 – Un graphe.

Chemin et connexité. Soit i et j deux entiers, i.e., $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$, on désigne par $[i, j]$ l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq i \text{ et } k \leq j\}$. Soit X un graphe. Soit $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ une séquence ordonnée de sommets de X , π est un *chemin* de x_0 à x_ℓ dans X si pour tout $i \in [1, \ell]$, x_i est adjacent à x_{i-1} . Dans ce cas, on dit que x_0 et x_ℓ sont *liés* pour X . Si $\ell = 0$, alors π est un *chemin trivial* dans X . Le graphe X est *connexe* si pour tout couple de sommets x et y de X , x et y sont liés pour X .

Dans le graphe X de la Figure 1.1, la séquence $\langle a, b, e, g, h \rangle$ est un chemin : les sommets a et h sont liés. En revanche, les sommets b et c ne sont pas liés. En effet, il n'existe pas, dans X , de chemin de b à c . Le graphe X n'est donc pas connexe. Par contre, le graphe $Y = (\{f, j, k\}, \{\{f, j\}, \{f, k\}, \{j, k\}\})$ est connexe. Remarquons également que X peut être “décomposé” en trois graphes connexes : il s'agit des composantes connexes de X .

Sous-graphes et composantes connexes. Soient X et Y deux graphes. Si $V(Y) \subseteq V(X)$ et $E(Y) \subseteq E(X)$, on dit alors que Y est un *sous-graphe* de X et on écrit $Y \subseteq X$. On dit que Y est une *composante connexe* de X , ou simplement une *composante* de X , si Y est un sous-graphe connexe de X qui est maximal pour cette propriété, i.e., pour tout graphe connexe Z , $Y \subseteq Z \subseteq X$ implique $Z = Y$.

On peut remarquer que deux composantes connexes C et C' d'un graphe X sont nécessairement disjointes : $V(C) \cap V(C') = \emptyset$ et $E(C) \cap E(C') = \emptyset$.

Le graphe $Y = (\{f, j\}, \{\{f, j\}\})$ (Figure 1.1) est un sous-graphe connexe de X mais ce n'est pas une composante connexe de X . En effet, le graphe $Z = (\{f, j, k\}, \{\{f, j\}, \{f, k\}, \{j, k\}\})$ est connexe et Y est un sous-graphe de Z ; Z , en revanche, est une composante connexe de X .

Remarques importantes. Dans tout le manuscrit G désigne un graphe connexe. Pour simplifier les notations, on écrit $G = (V, E)$ à la place de $G = (V(G), E(G))$ et l'application associée Γ_G est notée Γ . Nous supposons également que $E \neq \emptyset$.

De plus, si S est un sous-ensemble de V (resp. de E), on désigne par \bar{S} le complémentaire

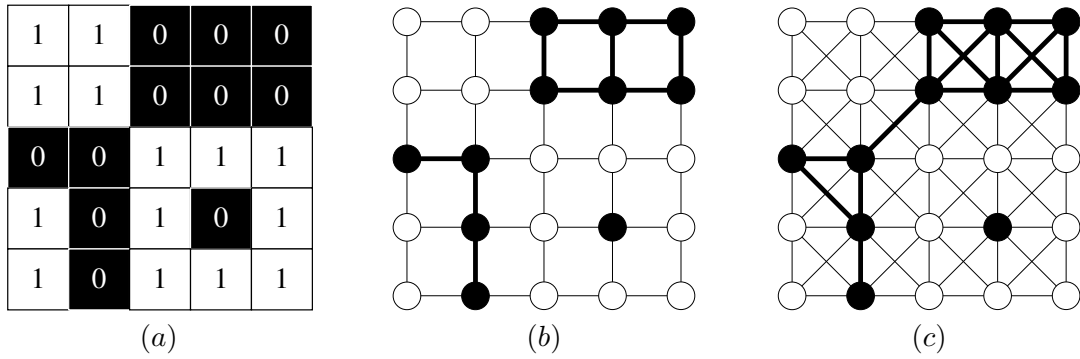


FIG. 1.2 – Relations d'adjacence usuelles en analyse d'image.

(a) une image bidimensionnelle; (b) graphe induit par la 4-adjacence associé à l'image (a); (c) graphe induit par la 8-adjacence associé à l'image (a).

de S dans V (resp. E) au lieu de \overline{S}^V (resp. \overline{S}^E).

Adjacences usuelles en analyse d'image. Une image F est une application d'un ensemble \mathcal{D} , appelé *domaine de l'image*, dans un ensemble \mathbb{K} . Le domaine d'une image bidimensionnelle est en général un sous-ensemble "rectangulaire" de \mathbb{Z}^2 : les éléments de \mathcal{D} sont appelés pixels. L'image F est souvent à valeur entière, c'est-à-dire $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{Z}$. En analyse d'image, il existe deux relations d'adjacence fondamentales définies sur \mathbb{Z}^2 qui permettent de structurer les pixels d'une image bidimensionnelle. La 4-adjacence, notée E_4 , est définie par : $\forall x, y \in \mathbb{Z}^2, \{x, y\} \in E_4$ ssi $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. La 8-adjacence, notée E_8 , est définie par : $\forall x, y \in \mathbb{Z}^2, \{x, y\} \in E_8$ ssi $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 1$.

La Figure 1.2 illustre les notions introduites dans ce paragraphe. La figure (a) présente une image bidimensionnelle. Les figures (b) et (c) montrent les graphes associés à (a) induit par respectivement la 4- et la 8-adjacence.

Dans un chapitre ultérieur, une définition (Définition 41) plus générale de ces relations d'adjacence, permettant entre autre d'appréhender des images de dimension quelconque, sera présentée.

Sous-graphes induits, connexité ensembliste. Soit P un sous-ensemble de sommets de G . Le *sous-graphe de G induit par P* , dénoté par G_P , est le graphe dont l'ensemble de sommets est P et dont l'ensemble d'arêtes est composé des arêtes de G ayant leurs deux sommets dans P , i.e., $G_P = (P, \{\{x, y\} \in E \mid x \in P, y \in P\})$. Dans ce qui suit, par souci de concision des notations, le sous-graphe de G induit par un ensemble de sommets P est désigné par P . De plus, si le sous-graphe induit par P est connexe, on dit, par abus de langage, que l'ensemble P est *connexe*; et si C est un sous-ensemble de P tel que le graphe induit par C est une composante connexe de G_P , on dit que C est une *composante connexe de P* .

Soit A un sous-ensemble d'arêtes de G . Le *sous-graphe de G induit par A* , dénoté par G_A , est le graphe dont l'ensemble d'arêtes est A et dont l'ensemble de sommets est composé de tous les points qui appartiennent à une arête de A , i.e., $G_A = (\{x \in V \mid \exists u \in A, x \in u\}, A)$. Dans ce qui suit, par souci de concision des notations, le sous-graphe de G induit par un ensemble d'arêtes A est désigné par A .

Dans la Figure 1.1, $(\{g, h, i\}, \{\{g, h\}, \{g, i\}\})$ est le graphe induit par l'ensemble de sommets $\{g, h, i\}$ et par l'ensemble d'arêtes $\{\{g, h\}, \{g, i\}\}$. On peut remarquer qu'il existe des sous-graphes de G qui ne sont induits par aucun ensemble de sommets. Par exemple Figure 1.1, il n'existe pas de sous-ensemble de sommets qui induit $X = (\{a, b, e\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}\})$. Le sous-graphe X est induit par l'ensemble d'arêtes $\{\{a, b\}, \{a, e\}\}$; et le sous-graphe induit par $\{a, b, e\}$ est le graphe $(\{a, b, e\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}\})$.

Dans la Figure 1.2b, (le sous-graphe induit par) l'ensemble des sommets noirs comprend trois composantes connexes alors que dans la Figure 1.2c, il n'en comprend que deux.

Arêtes adjacentes et sortantes. Soit $X \subseteq G$. On définit $\Gamma(X) = [\bigcup \{\Gamma(x) \mid x \in V(X)\}]$ et $\Gamma^*(X) = \Gamma(X) \setminus V(X)$. Si $x \in \Gamma^*(X)$, on dit que x est *adjacent* à X . Une arête u de G est *adjacente* à X si u n'est pas une arête de X et si $u \cap V(X) \neq \emptyset$. Si u est une arête adjacente à X et si $\overline{V(X)} \cap u \neq \emptyset$, on dit que u est une *arête sortante* de X . Si π est un chemin de x à y et si y est un sommet de X , alors π est un *chemin* de x à X (dans G).

Appelons G le graphe de la Figure 1.1 et considérons X , le sous-graphe de G , induit par les arêtes $\{e, i\}$ et $\{i, g\}$. L'arête $\{e, g\}$ est adjacente à X mais n'est pas une arête sortante de X alors que l'arête $\{b, e\}$ est sortante de X et donc également adjacente à X . Les arêtes $\{e, i\}$ et $\{b, d\}$ ne sont ni adjacentes, ni sortantes de X .

Connexion. Dans cette section, grâce à la notion de graphe, nous avons pu aborder la question de la connexité dans les espaces discrets. Une approche différente de la connexité, proposée par J. Serra ([10], chapitre 2, voir aussi [77]), est également adaptée aux espaces discrets. Étant donné un ensemble Ω , une *connexion* \mathcal{C} est définie comme une famille de sous-ensembles de Ω qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$;
2. pour tout $x \in \Omega$, $\{x\} \in \mathcal{C}$; et
3. pour toute sous-famille \mathcal{C}' de \mathcal{C} , si $(\cap \{C \mid C \in \mathcal{C}'\}) \neq \emptyset$, alors $(\cup \{C \mid C \in \mathcal{C}'\}) \in \mathcal{C}$.

Dans ce cas, tout élément C d'une connexion est dit *connexe*. Un sous-ensemble C de Ω est alors une *composante connexe* de Ω (relativement à \mathcal{C}) si C est un connexe maximal de Ω , i.e., $C' \in \mathcal{C}$ et $C \subseteq C'$ impliquent $C = C'$.

Un sous-ensemble des sommets du graphe G est *connexe* si le graphe induit correspondant est connexe. La notion de connexion permet de retrouver la notion de connexité sur les sommets d'un graphe. Pour cela, il suffit d'associer à l'ensemble V des sommets du graphe G la connexion \mathcal{C}_G composée de tous les sous-ensembles connexes de sommets de G . Dans ce cas, l'équivalence entre les composantes connexes de G et celles induites par \mathcal{C}_G est triviale. En revanche, il peut exister des connexions qui ne correspondent à aucun graphe, en particulier si l'on considère un ensemble Ω continu et non discret. L'approche de Serra, plus générale, diffère donc de celle considérée dans cette thèse. Pour Serra la notion d'ensemble connexe est globale et axiomatique. En revanche, en théorie des graphes, la notion de connexité, bien que globale également, est générée par une relation d'adjacence que l'on peut qualifier de locale au sens où elle ne fait intervenir que des paires de sommets.

1.2 Clivages

Intuitivement, dans un graphe, un clivage (ou une ligne de partage des eaux binaire) est un sous-ensemble de sommets qui ne peut être “réduit” sans changer le nombre de régions (*i.e.*, composantes connexes) de son complémentaire. Cette notion, qui permet d’appréhender l’idée d’ensemble frontière dans un graphe, est formalisée dans les définitions suivantes.

Définition 2 (point unconnecté) Soit P un sous-ensemble de V . On dit que p est unconnecté (pour P) si p est adjacent à exactement une composante de \overline{P} .

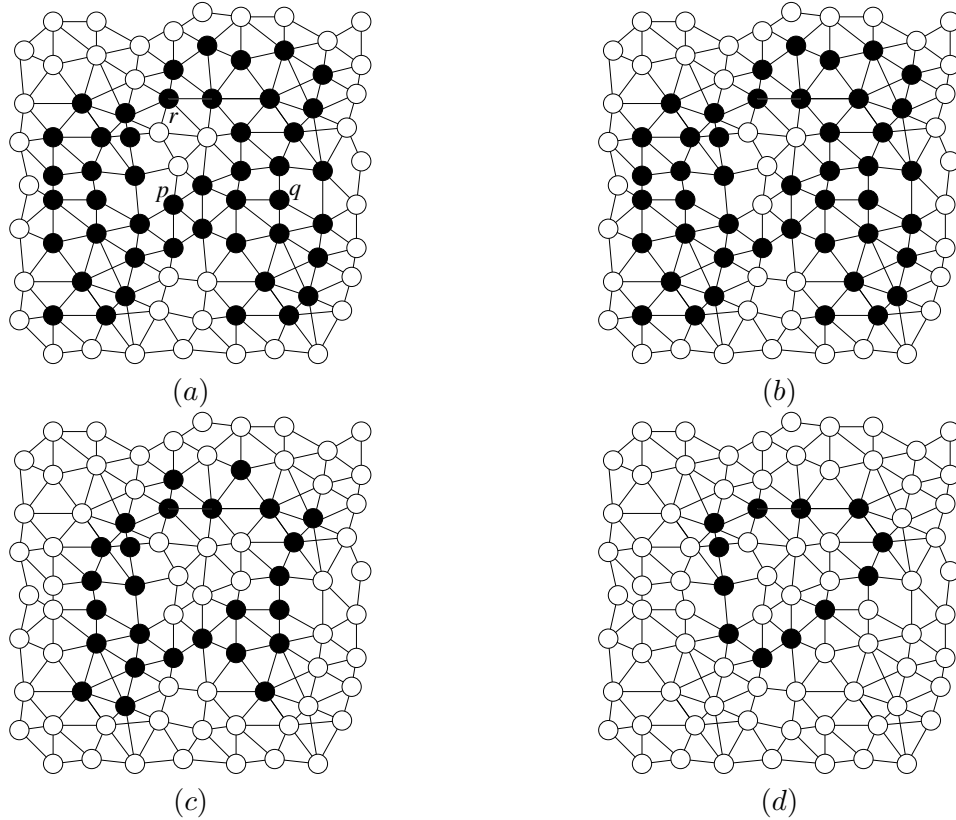


FIG. 1.3 – W-amincissements ensemblistes et clivages.

(a) : Un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble P (sommets noirs) de V . Le point p est un point de bord qui est unconnecté, et q est un point intérieur. (b) : L’ensemble $Q = P \setminus \{p\}$ (sommets noirs) est un W-amincissement de P . (c) : L’ensemble R (sommets noirs) est un W-amincissement de P and Q . Les ensembles Q et R ne sont pas des clivages : il existe des points unconnectés pour ces deux ensembles. (d) : Un clivage de P (sommets noirs), qui est aussi un clivage de Q et R .

Le sommet p (Figure 1.3a) est unconnecté pour l’ensemble P composé des sommets noirs. Il peut être remarqué que si l’on ôte le point p de l’ensemble P , le nombre de composantes connexes de \overline{P} (*i.e.*, les sommets blancs) reste inchangé. Les sommets q et r ne sont, par contre, pas unconnectés. En effet, ils sont adjacents à respectivement 0 et 2 composantes connexes de \overline{P} . Si l’on retire q de P , une nouvelle composante connexe blanche est créée ; si l’on retire r de P , alors deux composantes connexes blanches sont fusionnées. En fait, on peut montrer facilement

qu'un sommet p peut être enlevé d'un ensemble $P \subseteq V$ sans changer le nombre de composantes de \overline{P} si et seulement si p est unconnecté.

Définition 3 (clivage) Soit P un sous-ensemble de V . Le sous-ensemble P est un clivage s'il n'existe aucun point unconnecté pour P .

L'ensemble Q des sommets noirs dans la Figure 1.3d ne contient aucun point unconnecté : Q est donc un clivage. On a constaté précédemment que le point p est unconnecté pour l'ensemble P (Figure 1.3a) : P n'est donc pas un clivage. Le processus de W-amincissement, introduit ci-dessous, permet de dériver un clivage à partir d'un sous-ensemble quelconque de sommets.

Définition 4 Soient P et Q deux sous-ensembles de V .

On dit que Q est un W-amincissement de P si :

- i) $Q = P$; ou si
- ii) il existe un sous-ensemble R de P qui est un W-amincissement de P et un point $p \in R$ unconnecté pour R , tel que $Q = R \setminus \{p\}$.

Un sous-ensemble Q de P est un clivage de X (dans G) si Q est un W-amincissement de P et si Q est un clivage.

En d'autres termes, un W-amincissement de P peut être obtenu, à partir de P , par suppressions itératives de points unconnectés ; un ensemble Q est un clivage de P si Q est un W-amincissement de P qui ne contient pas de point unconnecté. La Figure 1.3 montre un ensemble P et quelques W-amincissements de P , le dernier étant un clivage de P . Notons qu'il existe en général différents clivages d'un même ensemble P .

1.3 Lignes de partage des eaux d'un graphe à sommets valués

Pour son intérêt topographique, la ligne de partage des eaux (LPE) a été étudiée de manière extensive dès le 19ème siècle par, entre autres, Maxwell [22] et Jordan [23]. Un siècle plus tard elle a été introduite par Digabel et Lantuéjoul [93] pour la segmentation d'image et elle est maintenant utilisée comme une étape fondamentale dans de nombreuses procédures de segmentation d'image (voir, par exemple, Figure 1.4).

Une image en niveau de gris peut être perçue comme un relief topographique (cf. Figures. 1.4b et d). Le niveau de gris d'un pixel de l'image est interprété comme son altitude dans le relief topographique. Un point est d'autant plus élevé dans le relief qu'il est clair dans l'image. Les pixels sombres correspondent donc aux vallées et bassins du relief alors que les pixels clairs correspondent aux collines et lignes de crêtes.

Une goutte d'eau tombant sur un relief topographique s'écoule selon un chemin descendant pour finalement atteindre un minimum régional. Intuitivement, les lignes de partage des eaux (cf. Figures. 1.4c et e) du relief correspondent aux limites des domaines d'attraction des gouttes d'eau.

Après un bref rappel des définitions de bases permettant d'appréhender une fonction numérique discrète, nous présentons différentes notions et algorithmes de ligne de partage des eaux (LPE) et discutons leurs points forts et faiblesses.

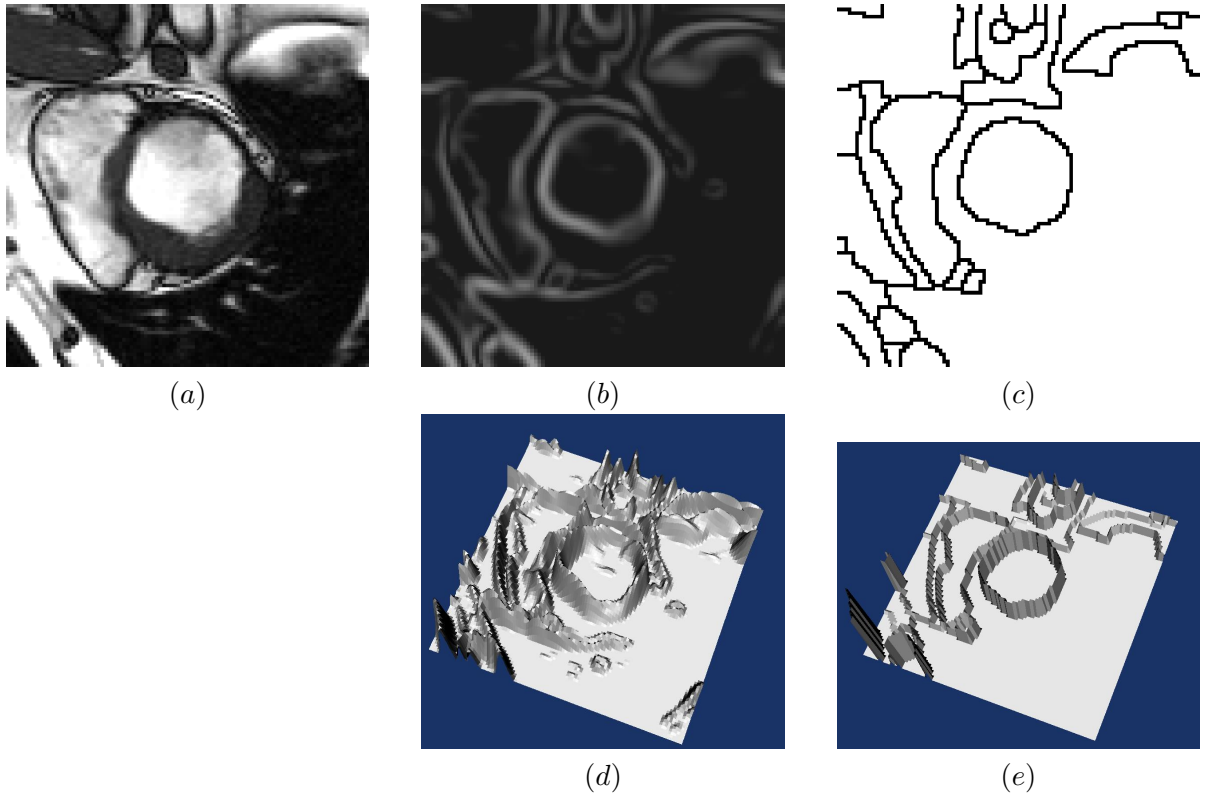


FIG. 1.4 – Illustration introductive à la ligne de partage des eaux en segmentation d'image.

Une procédure typique en morphologie mathématique comprend une étape de filtrage de l'image, la détection des contours (gradient), le calcul de la LPE et un post-traitement. (a) Une image extraite d'une séquence d'IRM cardiaque; (b) gradient de (a); (c) LPE de (b); (d) relief topographique associé à (b); (e) relief topographique associé à (c).

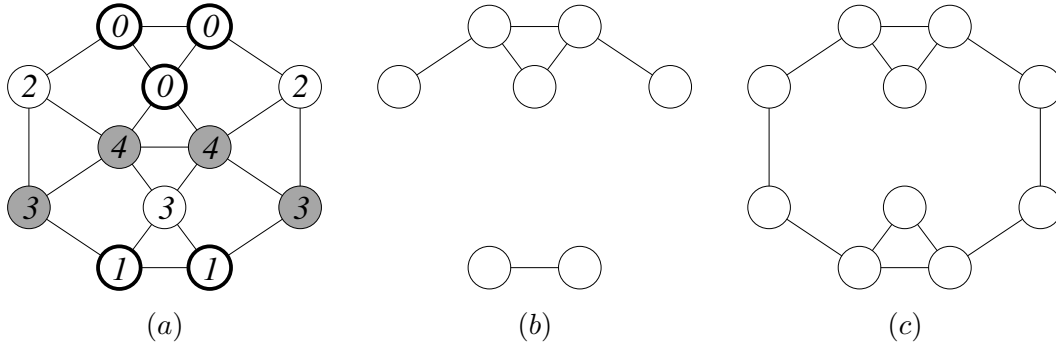


FIG. 1.5 – Graphe à sommets valués, sections inférieures et minima.

(a) : Un graphe dont les sommets sont valués par une fonction F . Les sommets qui appartiennent à des minima de F sont entourés en gras ; (b) : section inférieure de F au niveau 3 ; (c) : section inférieure de F au niveau 4.

1.3.1 Fonctions numériques discrètes

Soit k_{\min} et k_{\max} deux éléments de \mathbb{Z} tels que $k_{\min} < k_{\max}$. Nous posons $\mathbb{K}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \mid k_{\min} \leq k \leq k_{\max}\} = [k_{\min}, k_{\max}]$ et $\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \setminus \{k_{\max}\}$. Soit S un ensemble, nous désignons par $\mathcal{F}(S)$ l'ensemble de toutes les applications de S dans \mathbb{K} .

Soit $F \in \mathcal{F}(V)$. Si p est un élément de V , $F(p)$ est l'*altitude* de p (pour F).

Soit $k \in \mathbb{K}^+$. Nous désignons par $F[k]$ l'ensemble $\{p \in V; F(p) \geq k\}$ et par $\overline{F}[k]$ son complémentaire ; $F[k]$ est une *section supérieure* de F (au niveau k) et $\overline{F}[k]$, une *section inférieure* de F (au niveau k).

Soit $k \in \mathbb{K}^+$, une composante connexe de $\overline{F}[k]$ qui ne contient pas de composante connexe de $\overline{F}[k-1]$ est un *minimum régional* de F . Nous notons $M(F) \subseteq V$ l'ensemble de tous les points qui sont dans un minimum de F . Un sous ensemble P de V est *plat* (pour F) si pour tout couple de points p et q de P , $F(p) = F(q)$. Si P est plat pour F , l'*altitude* de P (pour F) est l'altitude de n'importe quel point de P .

La Figure 1.5 illustre les notions précédentes. Dans la figure (a) les sommets entourés en gras correspondent aux minima de la fonction. Les graphes présentés dans les figures (b) et (c) sont les sections inférieures de la fonction (a) aux niveaux 3 et 4.

Remarque importante. Dans la suite de ce chapitre F désigne un élément quelconque de $\mathcal{F}(V)$.

1.3.2 Lignes de partage des eaux par inondation

L'idée de la *LPE par inondation* [94, 38, 95] – parfois appelée *LPE par immersion* – a été introduite pour la segmentation d'image par S. Beucher et C. Lantuejoul [94].   tant donnée une image F perçue comme une surface topographique, la LPE par inondation peut être décrite par le processus intuitif suivant :

- placer une source d'eau dans chaque minimum régional de la surface topographique ;

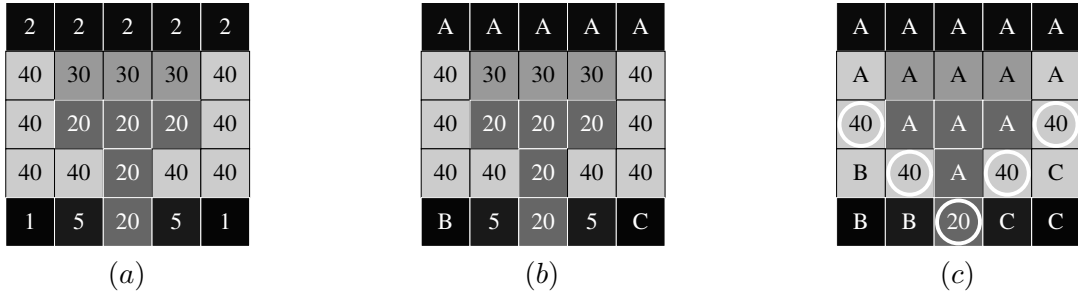


FIG. 1.6 – Exemple de LPE par inondation d'une image.

Les images présentées sont équipées de la 4-adjacence. (a) : Une image F ; (b) : les minima de F sont étiquetés A, B et C; (c) : les bassins versants (obtenus par LPE par inondation) sont étiquetés en fonction du minimum de F qui leur est associé; la LPE par inondation correspondante est constituée des points sans étiquette.

- inonder la surface topographique à partir des sources placées dans les minima, de manière à ce que le niveau d'eau monte à vitesse constante et soit uniforme dans tous les bassins versants;
- ériger une digue aux points où les eaux issues de deux sources (minima régionaux) différents se rencontrent de façon à ce que les eaux issues de deux bassins versants différents ne se mélangent pas.

A l'issue de ce processus, un ensemble de digues a été érigé : elles constituent une LPE par inondation du relief.

Parmi les nombreux algorithmes [38, 60] développés en suivant cette idée, celui de F. Meyer [95] est probablement le plus simple à décrire et comprendre. Il repose en particulier sur une heuristique simple qui consiste à analyser les pixels par ordre croissant de niveaux de gris. La notion de W-amincissement – couplée à une heuristique de sélection des points unconnectés par altitude croissante – permet de formaliser la transformation proposée par F. Meyer.

Définition 5 Soit P un sous-ensemble de $\overline{M(F)}$. L'ensemble P est un W-amincissement de F par inondation si :

- $P = \overline{M(F)}$; ou
- s'il existe $Q \subseteq V$ un W-amincissement de F par inondation et un point $p \in Q$ unconnecté pour Q tels que p est un point d'altitude minimale parmi les points unconnectés pour Q et $P = Q \setminus \{p\}$.

On dit que P est une LPE par inondation de F si P est à la fois un W-amincissement de F par inondation et un clivage de $\overline{M(F)}$.

Nous observons qu'il peut exister plusieurs LPE par inondation d'une même fonction.

D'après les définitions d'un clivage et d'un W-amincissement, on remarque immédiatement qu'une LPE par inondation P de F sépare son complémentaire \overline{P} en un certain nombre de régions dont chacune contient un et un seul minimum de F . De plus, chaque minimum de F est contenu dans une seule composante de \overline{P} . Si $M \subseteq V$ est un minimum de F , alors la composante de \overline{P} qui contient M est appelée *bassin versant de M* (pour P).

La LPE par inondation de la fonction présentée Figure 1.5a est composée des sommets gris. La Figure 1.6 présente une LPE par inondation sur une image équipée de la 4-adjacence. A partir de cette dernière illustration, nous pouvons déduire les deux remarques suivantes [72] formulées de manière intuitive. Elles seront développées et formalisées dans la suite de cette section et guideront notre analyse critique des différentes définitions de LPE.

Remarque 6 *Nous observons qu'il n'existe pas de chemin descendant allant des points d'altitude 20 étiquetés A dans la Figure 1.6c au minimum de F étiqueté A dans la Figure 1.6b.*

Remarque 7 *Une seconde observation est liée au contraste de l'image originale : dans l'image originale pour aller par exemple du minimum C au minimum A, il faut grimper à l'altitude 30 : en effet, il existe un contour d'altitude 30 qu'il faut nécessairement escalader. Nous observons que ce contour n'est pas présent dans la LPE par inondation. En effet, pour aller du bassin versant C au bassin versant A, il suffit de grimper à l'altitude 20.*

1.3.3 Lignes de partage des eaux par distance topographique

Intuitivement, une goutte d'eau tombant sur un relief topographique s'écoule le plus "rapidement" possible vers un minimum. Comme nous l'avons mentionné dans la Remarque 6, la LPE par inondation ne respecte pas cette idée intuitive. Dans son article de 1993 [42] (voir également [43, 60]), F. Meyer propose la notion de LPE topographique. Il propose entre autres une caractérisation reposant sur les chemins de plus grande pente.

Définition 8 (chemin de plus grande pente) *Soit $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ un chemin dans V . On dit que π est un chemin descendant pour F si pour tout $k \in [1, \ell]$, $F(x_{k-1}) \geq F(x_k)$. On dit que π est un chemin de plus grande pente pour F si π est un chemin descendant pour F et si pour tout $k \in [1, \ell]$, $F(x_k) = \min\{F(y), \{x_{k-1}, y\} \in E\}$.*

Définition 9 (LPE topographique) *Soit M un minimum de F .*

Le bassin d'attraction (topographique) de M (pour F) est l'ensemble des points de V depuis lesquels M est le seul minimum de F qui peut être atteint par un chemin de plus grande pente pour F .

La LPE par distance topographique de F est l'ensemble des points de V qui n'appartiennent à aucun bassin d'attraction de F .

Contrairement aux LPE par inondation, nous remarquons que la LPE par distance topographique est définie de manière unique pour une fonction F donnée.

La Figure 1.7 montre les bassins d'attraction des fonctions présentées Figures. 1.5 et 1.6.

Un autre définition [42] de la LPE topographique repose sur une pseudo-métrique : la *distance topographique*. La motivation principale était de fournir une définition qui possède de bonnes propriétés (voir également [43]) dans le cas de fonctions continues suffisamment régulières (\mathcal{C}^2) pour permettre un lien entre LPE et squelettes par zones d'influence, une généralisation des cartes de Voronoï.

D'après les deux illustrations dont nous avons discutées ci-dessus, il est possible de déduire les deux remarques suivantes.

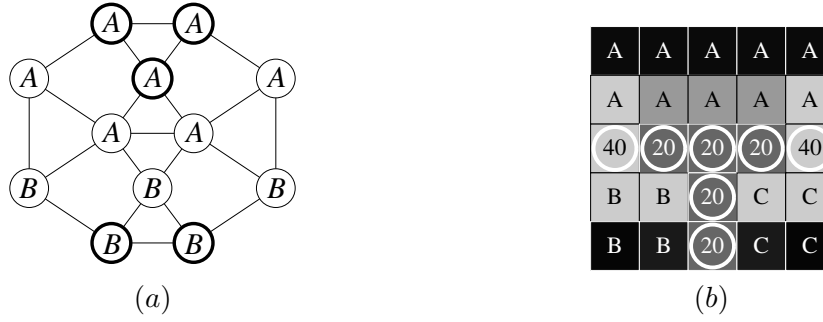


FIG. 1.7 – Ligne de partage des eaux topographique.

(a) : Les bassins d'attractions associés à la fonction F de la Figure 1.5a. Le bassin d'attraction du minimum de F composé de trois (resp. deux) sommets est étiqueté A (resp. B) ; (b) : Les bassins d'attraction de la fonction de la Figure 1.6 équipée de la 4-adjacence.

Remarque 10 *Étant donnée une fonction F , nous observons que la LPE topographique n'est pas, en général, un W -amincissement de $\overline{M}(F)$. De plus, elle peut être vide (cf. Figure 1.7a).*

Remarque 11 *On observe Figure 1.7b que la LPE topographique n'est pas nécessairement placée sur une "crête" de la fonction d'origine. Par exemple, le point x d'altitude 20 qui est adjacent à la fois aux bassins A et B, n'est voisin d'aucun pixel étiqueté A ou B dont l'altitude est inférieure à celle de x . Intuitivement, une goutte d'eau tombant au point x ne pourrait s'écouler directement dans aucun des bassins voisins de x . On remarque, de plus, qu'il n'existe pas de chemin descendant de x vers A.*

1.3.4 Lignes de partage des eaux inter-pixel (par inondation)

Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent, une LPE topographique n'est pas nécessairement un W -amincissement du complémentaire des minima. Dans un tel cas de figure, l'information significative réside dans les bassins d'attraction et non dans l'ensemble des pixels qui sépare ces bassins. Dans cette optique, il peut être intéressant d'avoir une notion de LPE qui ne produise pas d'ensemble séparant. Également dans [95] (voir aussi [41]), F. Meyer propose un algorithme d'inondation qui ne produit pas d'ensemble de pixels séparant mais uniquement un ensemble de bassins d'attraction. Ces bassins d'attraction partitionnent les pixels de l'image.

Étant donnée une image F , ce deuxième algorithme par immersion étend le plus possible les minima ; les pixels les moins élevés étant traités en priorité. Il peut être décrit de la manière suivante.

1. Attribuer une étiquette à chaque minimum de l'image ; marquer chaque point appartenant à un minimum avec l'étiquette correspondant à ce minimum. Initialiser un ensemble S à l'ensemble vide.
2. Insérer chaque point étiqueté dans l'ensemble S .
3. Extraire de l'ensemble S un point x d'altitude minimale, c'est à dire $F(x) = \min\{F(y) \mid y \in S\}$. Attribuer à chaque point y adjacent à x et non-étiqueté, l'étiquette de x et insérer y dans S .
4. Répéter l'étape 3 tant que S est non-vide.

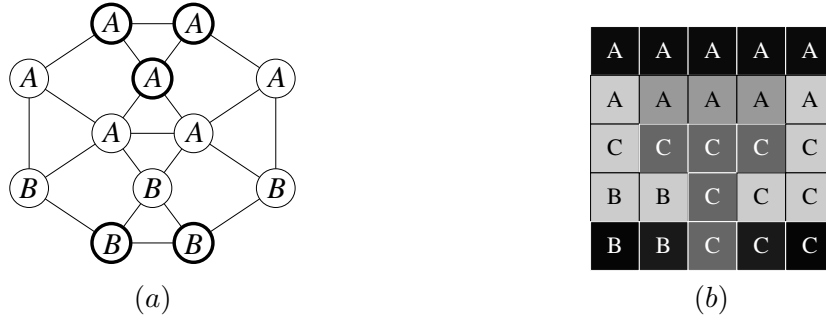


FIG. 1.8 – Ligne de partage des eaux inter-pixel (par inondation).

(a), Les bassins d'attraction par inondation associés à la fonction F de la Figure 1.5a. Le bassin d'attraction du minimum de F composé de trois (resp. deux) sommets est   tiqu  t   A (resp. B) ; (b), les bassins d'attraction par inondation de la fonction de la Figure 1.6.

La Figure 1.8 présente le résultat du précédent algorithme appliqué aux fonctions des Figures. 1.5a et 1.6a.

Il existe une alternative plus formelle et équivalente – reposant sur les graphes de plus courts chemins [68] –    cette définition algorithmique. Nous détaillons cette approche dans le Chapitre 4.

L'algorithme ci-dessus produit une partition Ψ de V – *i.e.*, Ψ est un sous-ensemble de 2^V tel que $\bigcup\{P \in \Psi\} = V$ et $\forall P, Q \in \Psi, P \cap Q = \emptyset$. Chaque élément de Ψ est appelé *bassin d'attraction (par inondation) de Ψ pour F* . Nous remarquons que chaque bassin d'attraction contient exactement un minimum de F mais que la partition Ψ n'est pas définie de manière unique par ce processus.

La propriété suivante, qui peut être montr  e facilement, établit un lien entre cet algorithme et la LPE topographique à travers les chemins de plus grande pente.

Propriété 12 *Soit Ψ une partition de V produite par l'algorithme précédent. Pour tout point p de V , il existe dans M' un chemin de plus grande pente pour F de p    M , où M' désigne l'unique élément de Ψ qui contient p et où M est l'unique minimum de F inclus dans M' .*

D'après la propriété précédente, on remarque facilement qu'à la différence d'une LPE topographique, une LPE inter-pixel d'une fonction F n'est pas définie de manière unique. Un choix arbitraire doit être réalisé pour attribuer une étiquette aux sommets du graphe depuis lesquels il est possible d'atteindre plusieurs minima de F .

1.3.5 Lignes de partage des eaux topologiques

Les deux précédentes notions de LPE s'intéressent principalement aux bassins versants et non    la "ligne" qui les sépare. Dans certains cas, il est important de disposer d'un ensemble de pixels constituant une frontière. Tout comme la LPE par immersion (Section 1.3.2), la *ligne de partage des eaux topologique*, introduite par M. Couprie et G. Bertrand en 1997 [104], produit une séparation entre les bassins. Le développement et l'étude [71, 73, 72] de cette approche radicalement différente puise sa motivation dans la Remarque 7. Il est en effet souhaitable lorsque deux minima sont séparés par une crête que les bassins versants correspondants soient séparés par une crête de même altitude. La LPE topologique produit une séparation vérifiant cette propriété.

De plus, comme l'ont montré les deux articles [71, 72], si l'on a besoin d'une transformation vérifiant une telle propriété alors il faut nécessairement utiliser une transformation de type "ligne de partage des eaux topologique".

Extensions et LPE topologiques [71]

Définition 13 (extension ensembliste) Soient P et Q deux sous-ensembles de V . On dit que Q est une extension de P si P et Q sont vides ou si $P \subseteq Q$ et si chaque composante de \overline{Q} contient exactement une composante de P . Le sous-ensemble Q est une co-extension de P si \overline{Q} est une extension de \overline{P} .

Dans la Figure 1.3, l'ensemble Q formé des sommets blancs dans la sous-figure (c) est une extension des sommets blancs de la sous-figure (a). Donc, \overline{Q} (sommets noirs en (c)) est une co-extension de \overline{P} (a).

Si H est un élément de $\mathcal{F}(V)$ tel que, pour tout point p de V , $H(p) \leq F(p)$, on écrit $H \leq F$.

A travers ses sections supérieures, toute fonction de $\mathcal{F}(V)$ peut être perçue comme un empilement d'ensembles. En fait, cette vision ouvre la voie vers une méthode systématique pour étendre aux fonctions les définitions ensemblistes. On remarque, par exemple, que $H \in \mathcal{F}(V)$ est telle que $H \leq F$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{K}$, $H_k \subseteq F_k$: la relation \leq étend la relation ensembliste \subseteq . De la même manière, il est possible d'étendre les notions ensemblistes d'extension et co-extension aux éléments de $\mathcal{F}(V)$.

Définition 14 (LPE topologique) Soit H une fonction de $\mathcal{F}(V)$.

On dit que H est une co-extension de F , si, pour tout $k \in \mathbb{K}$, $H[k]$ est une co-extension de $F[k]$. On dit que H est une LPE topologique de F si H est une co-extension minimale de F , i.e., H est une co-extension de F telle qu'il n'existe aucune co-extension I de F qui satisfasse $I \leq H$ et $I \neq H$. Dans ce cas, on dit également que la fonction H est une LPE topologique.

En d'autres termes, H est une LPE topologique de F si chaque section inférieure de H est une extension de la section inférieure correspondante de F et s'il n'existe aucune fonction $I \neq H$ dont les composantes inférieures sont toutes des extensions des sections inférieures correspondantes de H .

La Figure 1.9a présente un graphe G et une fonction F associée. Une co-extension H de F est montrée en (b). Par exemple, $\overline{H_4}$ comprend trois composantes connexes (cerclées) et chacune d'elles contient exactement une composante connexe de $\overline{F_4}$; de la même manière, les deux composantes de $\overline{H_5}$ contiennent les deux composantes de $\overline{F_5}$. De plus, nous pouvons observer, que si nous abaissions n'importe quelle valeur de H , la fonction résultante ne serait plus une co-extension de F : H est donc une LPE topologique de F . Une autre LPE topologique de F est représentée en (c). Dans la sous-figure (d), nous montrons une co-extension J de F . Cette co-extension n'est pas une LPE topologique de F car $H \leq J$, et $H \neq J$.

Un autre exemple est présenté Figure 1.10. Nous supposons que les images sont équipées de la relation de 4-adjacence. La fonction représentée en (a) est une LPE topologique de celle de la Figure 1.6a.

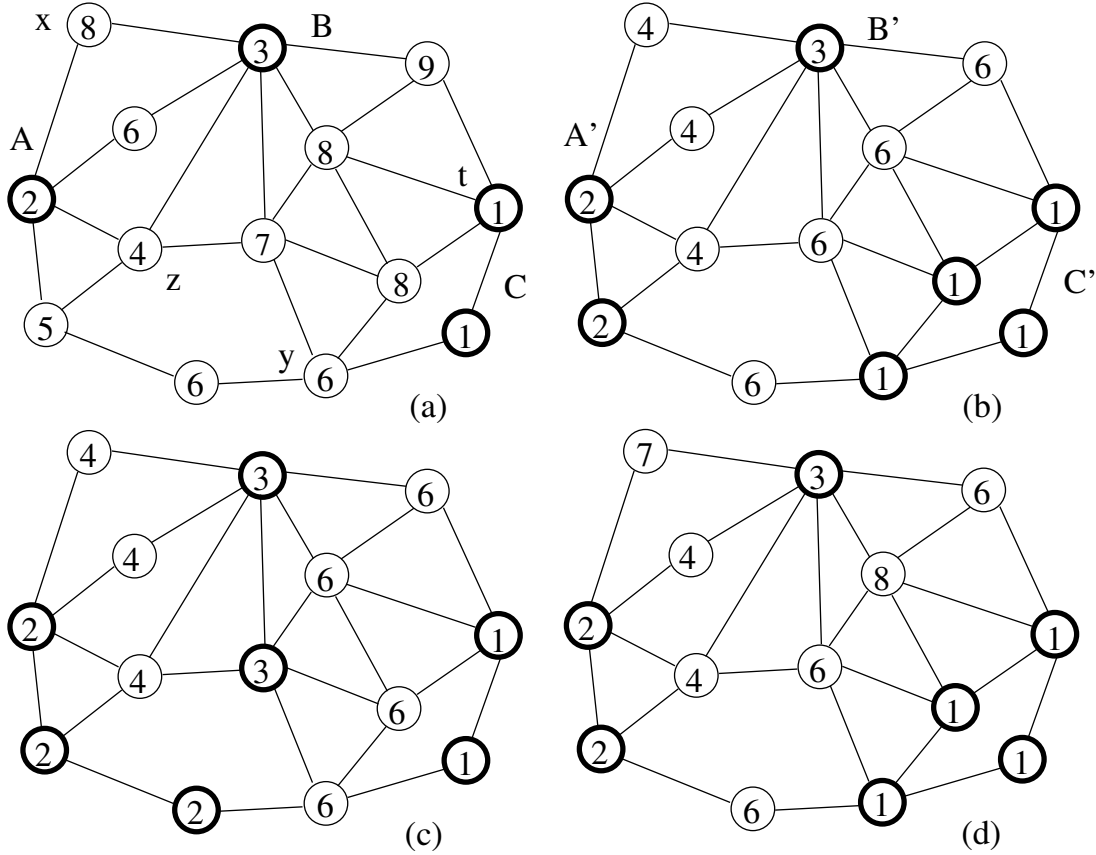


FIG. 1.9 – LPE topologique d'un graphe à sommets valués.

(a), Une fonction F ; (b), une fonction $H \leq F$ qui est une LPE topologique de F ; (c), une autre LPE topologique I de F ; (d), une fonction J qui est une co-extension de F mais n'est pas une LPE topologique de F .

W-amincissements [104, 71]

Nous pouvons remarquer Figure 1.3 que les ensembles de sommets noirs dans les sous-figures (b, c, d) sont à la fois des W-amincissements et des co-extensions de l'ensemble en noir figure (a). Cette propriété est-elle vérifiée quels que soient les ensembles de sommets considérés ? Dans l'article de 1997 [104], la notion de W-amincissement d'une fonction joue un rôle primordial et dans [71], G. Bertrand démontre, pour les fonctions, l'équivalence entre co-extensions et W-amincissements.

Définition 15 (point W-destructible) Soit $p \in V$ et $k = F(p)$. On dit que le point p est W-destructible (pour F) si p est unconnecté pour F_k .

Dans la Figure 1.9, le point z , d'altitude 4, est adjacent à deux composantes connexes de $\overline{F_4}$ alors que le point t , d'altitude 1, n'est adjacent à aucune composante de $\overline{F_1}$. Donc, z et t ne sont pas W-destructibles. En revanche, il peut être vérifié que les points x and y sont W-destructibles.

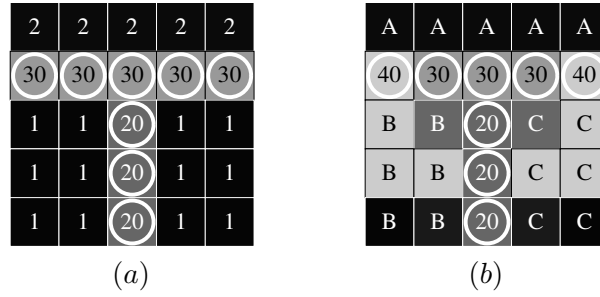


FIG. 1.10 – Exemple de LPE topologique d'une image.

Les images présentées sont équipées de la 4-adjacence. (a), Une LPE topologique H de l'image de la Figure 1.6, la séparation induite par H est constitué des points entourés; (b), les bassins d'attraction de H sont superposés à l'image originale.

Définition 16 (W-amincissement) Soit H une fonction de $\mathcal{F}(V)$. On dit que H est un W-amincissement de F , si :

- i) $H = F$; ou si
- ii) il existe une fonction I qui est un W-amincissement de F et un point W -destructible p pour I tels que $H(p) = I(p) - 1$, et $H(q) = I(q)$ pour tout $q \in V \setminus \{p\}$.

En d'autres termes, la fonction H est un W-amincissement de la fonction F , si H peut être dérivée de F en abaissant itérativement de 1 les valeurs de points W -destructibles.

Théorème 17 (amincissement) Soit H une fonction de $\mathcal{F}(V)$.

- i) La fonction H est un W-amincissement de F si et seulement si H est une co-extension de F .
- ii) La fonction H est une LPE topologique de F si et seulement si H est un W-amincissement de F tel qu'aucun sommet $p \in V$ n'est W -destructible pour H .

Une conséquence immédiate de ce théorème est que, pour toute LPE topologique H de F , il existe une séquence d'abaissement de points W -destructibles jusqu'à idempotence qui permet d'obtenir H . Réciproquement, un tel processus engendre nécessairement une LPE topologique de F . Il permet ainsi, en tirant parti d'une structure de données auxiliaire (arbre des composantes [78]) pour tester si un point est W -destructible, de déduire des algorithmes quasi-linéaires de LPE topologique [73].

Valeur de connexion [72, 71]

Nous avons vu (Remarque 7) que, dans l'image Figure 1.6a, pour atteindre B l'un des deux minima d'altitude 1 depuis le minimum A d'altitude 2, il est nécessaire de "grimper" au moins à l'altitude 30. Nous pouvons dire que A et B sont *séparés* par une crête d'altitude 30 ou que la *valeur de connexion* entre A et B est égale à 30. Dans ce paragraphe nous formalisons ces notions et présentons un théorème d'équivalence, démontré par G. Bertrand [71], qui permet de caractériser les LPE topologiques grâce à ces notions.

Si p et q sont deux points de V , on désigne par $\Pi(p, q)$ l'ensemble composé de tous les chemins de p à q dans V .

La valeur de connexion [71, 83, 72] (aussi appelée degré de connexité [33] à une inversion près de F) peut être interprétée comme une notion de contraste entre des sous-ensembles de sommets dans un graphe.

Définition 18 (valeur de connexion) Si π est un chemin dans V , nous posons $F(\pi) = \max\{F(p); p \text{ apparaissant dans } \pi\}$.
 Si p et q sont deux sommets de V , nous posons $F(p, q) = \min\{F(\pi); \pi \in \Pi(p, q)\}$, $F(p, q)$ est la valeur de connexion pour F entre p et q . Si P et Q sont deux sous-ensembles de V , la valeur de connexion pour F entre P et Q est définie par $F(P, Q) = \min\{F(p, q); p \in P, q \in Q\}$.

Définition 19 Soient p et q deux points de V .

On dit que p et q sont séparés (pour F) si $F(p, q) > \max\{F(p), F(q)\}$.

On dit que p et q sont k -séparés (pour F) si p et q sont séparés et si $k = F(p, q)$.

Dans la Figure 1.9a, $F(z, y) = 6$ et $F(y) = 6$, et donc z et y ne sont pas séparés. En revanche les points z et t sont 6-séparés.

Définition 20 Soit H un élément de $\mathcal{F}(V)$ tel que $H \leq F$. On dit que H est une séparation de F si, pour tous p et q dans V , p et q sont k -séparés pour F implique p et q sont k -séparés pour H .

Le théorème suivant [71] énonce qu'il est suffisant de considérer les minima de F pour tester si une fonction H est ou n'est pas une séparation de F .

Théorème 21 (restriction aux minima) Soit H une fonction de $\mathcal{F}(V)$ telle que $H \leq F$. La fonction H est une séparation de F si et seulement si, pour tous minima X et Y de F , $F(X, Y) = H(X, Y)$.

Les sommets des trois minima A , B et C de la fonction F (Figure 1.9a) sont en trait gras. La fonction H (Figure 1.9b) est telle que $H \leq F$ et $F(A, B) = H(A, B) = 4$, $F(A, C) = H(A, C) = 6$, $F(B, C) = H(B, C) = 6$. Donc, H est une séparation de F .

Si une fonction H est une séparation de F , on peut remarquer que H peut avoir plus de minima que F . Comme notre objectif est d'étudier les LPE topologiques et comme une LPE topologique d'une fonction ne peut pas avoir plus de minima que cette fonction, nous définissons la notion de séparation forte [71].

Définition 22 Soit H un élément de $\mathcal{F}(V)$ tel que $H \leq F$.

On dit que H est une séparation forte de F si H est une séparation de F et si tout minimum M de H contient au moins un minimum M' de F tel que $H(M) = F(M')$.

Le théorème suivant établit l'équivalence entre les notions de W-amincissement et de séparation forte et donc, d'après le Théorème 17, également avec la notion de co-extension. Le "sens direct" implique en particulier qu'une LPE topologique préserve la valeur de connexion entre les minima de la fonction. De plus, la réciproque établit que toute transformation par abaissement de valeurs qui préserve la valeur de connexion entre les minima de F est nécessairement un W-amincissement.

Théorème 23 (séparation forte) Soit $H \in \mathcal{F}(V)$.

La fonction H est un W-amincissement de F si et seulement si H est une séparation forte de F .

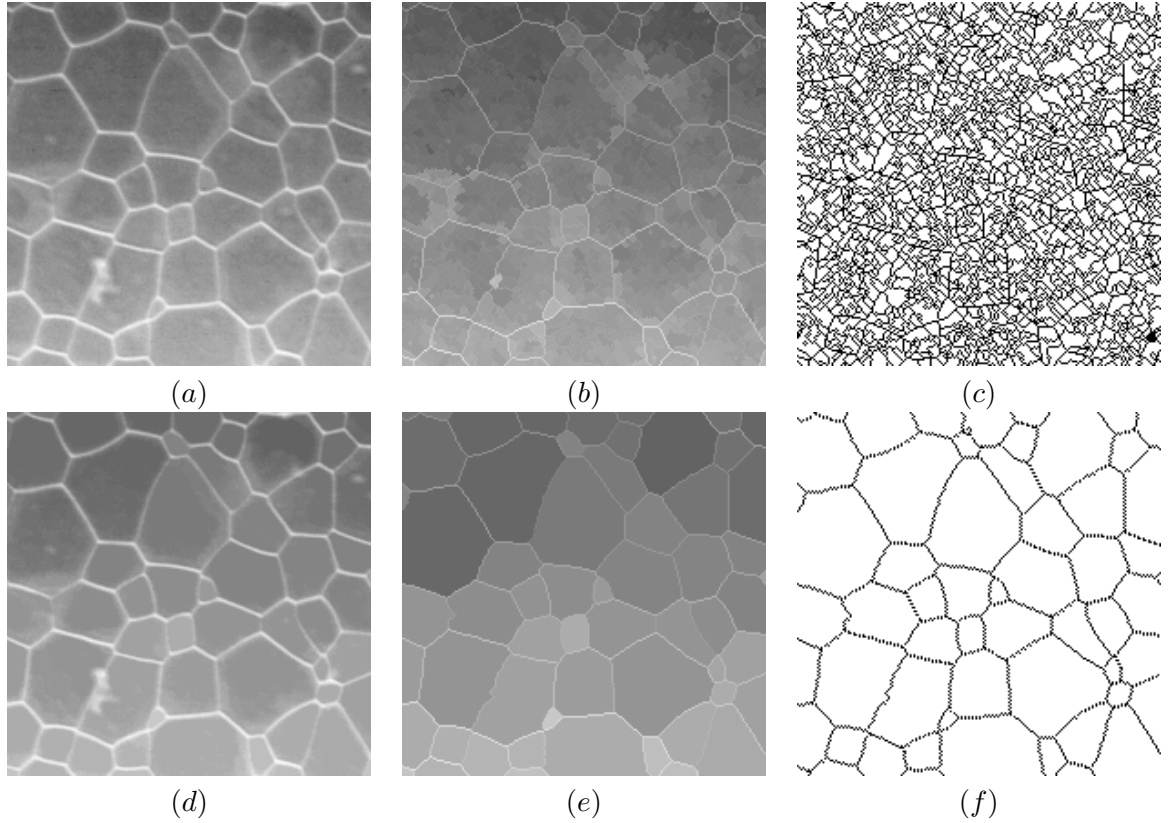


FIG. 1.11 – Lignes de partage des eaux topologiques d'une image réelle.

(a), Image originale ; (b), une LPE topologique de (a) ; (c), les minima de (b) (en blanc) ; (d), une version filtrée de (a) avec la dynamique ordonnée [83] ; (e), une LPE topologique de (d) ; (f), les minima de (e).

Comme une LPE topologique de F est une co-extension de F , une conséquence immédiate de ce théorème est que si la valeur de connexion entre deux minima de F est égale à k alors la valeur de connexion entre les deux minima correspondant de toute LPE topologique de F est également k . De plus, comme une LPE topologique est une co-extension minimale de F , on déduit qu'il n'existe aucune fonction $I \neq H$ dont les minima constitue une extension des minima de H (et donc de F) et qui vérifie la propriété de séparation forte. En d'autres termes, l'ensemble des points n'appartenant à aucun minimum de H , est une co-extension, donc un W-amincissement, de $\overline{M(F)}$ qui "préserve" la valeur de connexion et est minimal pour ces deux propriétés.

Définition 24 (séparation induite) *La séparation induite par F est l'ensemble des points de V qui n'appartiennent à aucun minimum de F .*

Dans la Figure 1.11, une LPE topologique (b) de l'image originale (a) est représentée. La séparation induite par la LPE topologique (c) illustre la caractéristique de sur-segmentation de toutes les LPE. En utilisant la méthodologie introduite en morphologie mathématique [96, 83], nous pouvons extraire tous les minima qui ont une dynamique supérieure à un seuil donné (ici 20), et supprimer les autres par reconstruction géodésique. Nous obtenons l'image (d), la LPE topologique (e), et la séparation induite (f).

TAB. 1.1 – Résumé des propriétés vérifiées par les différentes LPE.

Dans le tableau, S (resp. NS et NA) signifie satisfait (resp. ne satisfait pas, et ne s'applique pas).

	1	2	3	4	5
LPE par inondation	S	NS	NS	?	NS
LPE topographique	NS	S	S	S	NS
LPE inter-pixel	NS	S	S	NA	NA
LPE topologique	S	NS	S	NS	NS

1.3.6 Classification des lignes de partage des eaux

Pour conclure ce chapitre, nous résumons (Tableau. 1.1) les propriétés des LPE abordées dans ce chapitre.

Nous donnons tout d'abord une formulation mathématique aux propriétés évoquées, parfois de manière informelle, au cours de ce chapitre.

Soit $P \subseteq V$ une LPE (par inondation, par distance topographique, inter-pixel, ou topologique) de F et Ψ l'ensemble des bassins associés.

1. l'ensemble P est un W-amincissement de $\overline{M(F)}$;
2. pour tout $M' \in \Psi$, pour tout point $p \in M'$, il existe, dans M' , un chemin de plus grande pente de p vers M , M étant l'unique minimum de F inclus dans M' ;
3. pour toute paire de bassins d'attraction $M'_1, M'_2 \in \Psi$, la valeur de connexion (pour F) entre M'_1 et M'_2 est égale à la valeur de connexion (pour F) entre M_1 et M_2 , les deux minima de F tels que $M_1 \subseteq M'_1$ et $M_2 \subseteq M'_2$;
4. pour tout sommet p de P , il existe M_1 et M_2 deux minima distincts de F qui peuvent être atteints depuis p par un chemin descendant;
5. pour tout sommet p de P , il existe M_1 et M_2 deux minima distincts de F qui peuvent être atteints depuis p par $\pi_1 = \langle p, x_1, \dots, x_k \rangle$ et $\pi_2 = \langle p, y_1, \dots, y_\ell \rangle$ deux chemins descendants tels que $x_i \in M'_1$, $i \in [1, k]$, et $y_i \in M'_2$, $i \in [1, \ell]$; $M'_1 \in \Psi$ et $M'_2 \in \Psi$ étant les deux bassins qui contiennent respectivement M_1 et M_2 .

Le Tableau. 1.1 classifie les notions de LPE abordées dans ce chapitre : la LPE par inondation, la LPE par distance topographique, la LPE inter-pixel par inondation et la LPE topologique. Dans le tableau, le symbole “S” (resp. “NS”, “NA”) signifie que la notion de LPE dont il est question sur cette ligne satisfait (resp. ne satisfait pas et ne s'applique pas à) la propriété dont il est question dans cette colonne. Un contre-exemple aux propriétés 4 et 5 pour la LPE topologique est présenté Figure 1.12.

Aucune des définitions de LPE abordées jusqu'ici ne vérifie les cinq propriétés présentées ci-dessus. Intuitivement, il semblerait cependant consistant de disposer d'un cadre mathématique et d'une définition de LPE qui vérifie ce jeu de propriétés. Une des questions centrales abordées dans cette thèse est précisément celle de l'existence d'un tel cadre. Dans les chapitres suivants, nous y répondrons positivement. Dans le Chapitre 2, nous étudions les méthodes de fusion de régions et exhibons quatre classes de graphes ayant de bonnes propriétés. Dans le Chapitre 3, nous étudions les LPE dans l'une de ces quatre classes de graphes appelés graphes de fusion parfaits. En particulier, nous montrons que les LPE dans les graphes de fusion parfaits vérifient

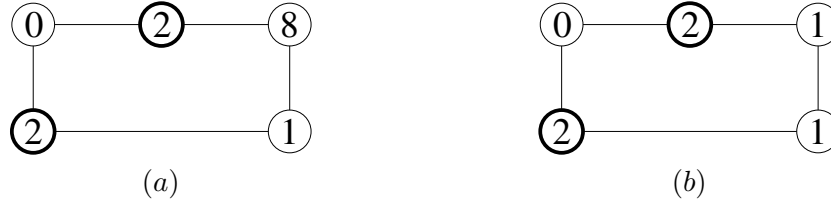


FIG. 1.12 – Contre-exemple utilisé dans la classification des LPE.

Un graphe (a) dont les sommets sont valués par une fonction F et (b) une fonction H qui est une LPE topologique de F . La séparation induite par H est représentée en gras figure (a). On constate que cette séparation ne vérifie pas les propriétés 4 et 5. En effet, il n'existe qu'un seul minimum de F qui peut être atteint depuis le point d'altitude 2 (première ligne) par un chemin descendant.

les propriétés mentionnées ci-dessus. Les graphes à arêtes valuées étudiés Chapitre 4 sont un cas particulier des graphes de fusion parfaits. Dans ces graphes, on peut de plus démontrer l'optimalité des LPE. Finalement, dans le Chapitre 5, nous présentons une applications de la LPE dans les graphes à arêtes valuées pour la segmentation d'images cardiaques spatio-temporelles.

Chapitre 2

Graphes de fusion : clivages et propriétés de la fusion de régions

2.1 Introduction

La notion de connexité abordée dans le chapitre précédent joue un rôle essentiel dans la tâche importante et difficile qu'est la segmentation d'une image. Dans de nombreux cas, une segmentation est un ensemble de régions connexes séparées par un ensemble frontière. La fusion de régions est une approche populaire en segmentation d'image [9, 6]. Elle consiste, à partir d'une segmentation initiale, à fusionner progressivement des paires de régions voisines jusqu'à ce qu'un certain critère soit satisfait. Le critère permettant d'identifier la prochaine paire de régions qui doit être fusionnée, tout comme la condition d'arrêt, est spécifique à chaque application.

Étant donnée une image en niveau de gris, comment obtenir un ensemble initial de régions pour une procédure de fusion ? La LPE, dont les variantes les plus significatives ont été présentées au chapitre précédent, est un outil puissant pour résoudre ce problème (voir Figure 2.1a,b). A cause de la texture et du bruit, les images réelles comprennent souvent un grand nombre de minima et donc la LPE a souvent un aspect “mosaïque” comme celui observé dans l'exemple Figure 2.1b. Ce chapitre ne s'attarde pas sur les méthodes permettant d'obtenir une LPE. Nous considérons directement le résultat d'un tel algorithme : dans un graphe, un clivage (Définition 3) est un ensemble de sommets qui ne peut être réduit sans changer le nombre des composantes connexes de son complémentaire.

Une première question se pose lorsque nous considérons un clivage dans un graphe. Étant donné un sous-ensemble rectangulaire \mathcal{D} de \mathbb{Z}^2 et le graphe (\mathcal{D}, E_4) qui correspond au graphe induit par la 4-adjacence, nous observons qu'un clivage peut contenir des “points intérieurs”, *i.e.*, des points qui ne sont adjacents à aucun point en dehors du clivage (voir Figure 2.1c,d). Nous pouvons dire qu'un clivage dans (\mathcal{D}, E_4) n'est pas nécessairement mince. D'autre part, de tels points intérieurs ne semblent pas apparaître avec E_8 , la relation de 8-adjacence. Les clivages dans (\mathcal{D}, E_8) sont-ils toujours minces ? Nous allons montrer que c'est en effet le cas. Plus généralement, nous introduisons dans ce chapitre un cadre mathématique pour étudier les propriétés de minceur des clivages dans n'importe quel type de graphe. Nous identifions la classe des graphes dans lesquels tout clivage est nécessairement mince. Ce résultat est l'un des résultats principaux du chapitre (Théorème 36).

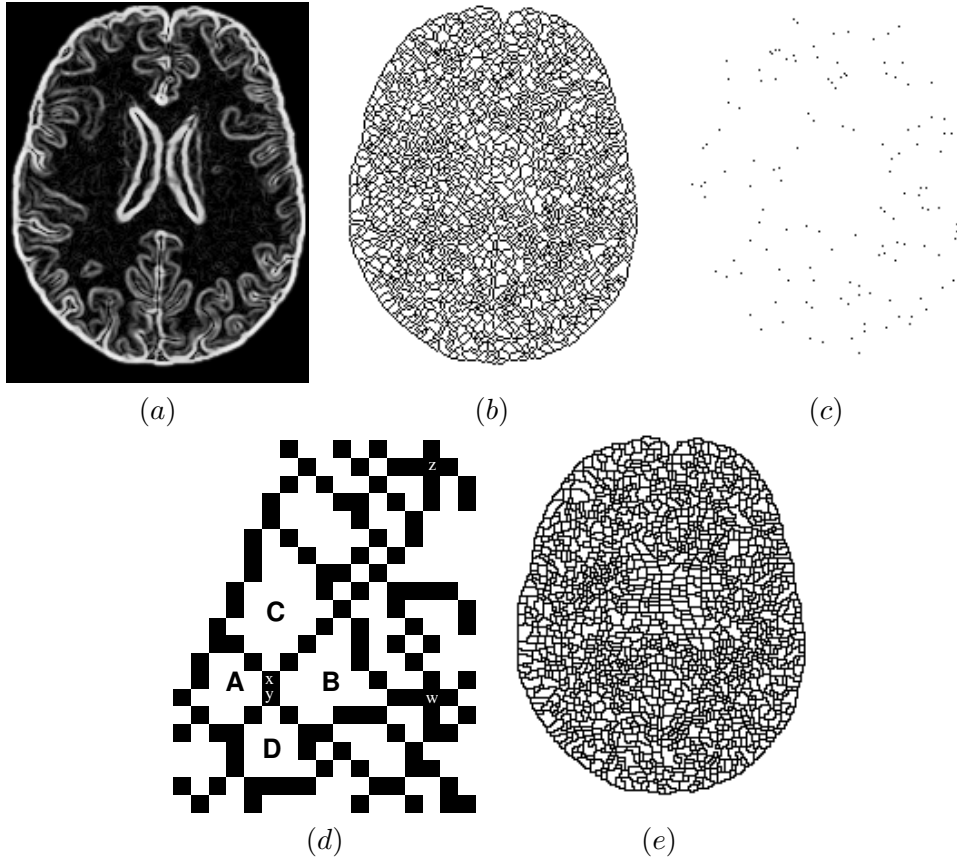


FIG. 2.1 – Introduction aux problèmes liés à la fusion de régions.

(a) : Image originale (section d'une image de cerveau, après avoir appliqué un opérateur de gradient). (b) : Un clivage obtenu grâce à une LPE par inondation de (a) pour la 4-adjacence (pixels noirs). (c) : Points intérieurs de l'image précédente (pixels noirs). (d) : Zoom sur une partie de (b). Les points z et w sont intérieurs. (e) : Un clivage pour la 8-adjacence (pixels noirs). Il n'y a pas de points intérieurs.

Revenons maintenant au problème de la fusion de régions. Que se passe-t-il si l'on souhaite fusionner deux régions A et B et que chaque pixel adjacent à ces deux régions est également adjacent à une troisième région que l'on ne souhaite pas fusionner ? La Figure 2.1d illustre une telle situation : le point x est adjacent aux régions A , B et C et y est adjacent à A , B et D . Dans cet exemple, il est impossible de fusionner les régions A et B sans fusionner également ou C ou D . Ce problème a été identifié, en particulier, par T. Pavlidis (voir [6], section 5.6 : “When three regions meet” [“Où trois régions se rencontrent”]) et a été traité de manière ad-hoc selon les besoins applicatifs. Jusqu'à maintenant aucune étude systématique des propriétés liées à la fusion de régions dans les graphes n'avait été effectuée. Une contribution majeure de ce chapitre (voir aussi [87, 111, 84]) est la définition et l'étude de quatre classes de graphes définis en considérant les différentes possibilités de “blocages” pouvant survenir dans les processus de fusion de régions (Section 2.3, Section 2.4). En particulier, nous disons qu'un graphe est un *graphe de fusion* si toute région A dans ce graphe peut toujours être fusionnée avec une autre région B , tout en préservant toutes les autres régions. Le résultat le plus frappant de cette étude est que la classe des graphes de fusion est précisément celle des graphes dans lesquels tout clivage

est nécessairement mince (Théorème 36). Nous donnons également des caractérisations locales pour deux de ces quatre classes de graphes et montrons que les deux autres ne peuvent pas être caractérisées localement (Section 2.5).

En utilisant ce cadre mathématique, nous analysons le statut des graphes les plus fréquemment utilisés en analyse d'image, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux 4- et 8-adjacences sur \mathbb{Z}^2 et aux 6- et 26-adjacence sur \mathbb{Z}^3 (Section 2.6). Dans l'une des classes de graphes introduites dans la Section 2.4, appelée la classe des *graphes de fusion parfaits*, toute paire de régions voisines A et B peut être fusionnée en préservant toutes les autres régions. De plus, la fusion de A et B peut être simplement réalisée en supprimant de l'ensemble frontière tous les pixels adjacents à la fois à A et à B . Nous montrons qu'aucun des graphes classiques de l'analyse d'image n'est un graphe de fusion parfait.

Finalement, dans la Section 2.7, nous introduisons un graphe sur \mathbb{Z}^n (quel que soit n entier positif) appelé *grille de fusion parfaite*, qui est en effet un graphe de fusion parfait, et qui est entre – au sens de l'inclusion des relations d'adjacence – les graphes d'adjacence directe et d'adjacence indirecte qui généralisent les 4- et 8-adjacence à \mathbb{Z}^n . De plus, dans un article en préparation, nous prouvons que cette grille n -dimensionnelle est le seul graphe (à une translation près) possédant ces deux propriétés.

Les preuves des propriétés énoncées dans ce chapitre peuvent être trouvées dans la référence [87], qui est reprise dans l'Annexe A du manuscrit.

2.2 Ensembles minces et graphes d'arêtes

Dans cette partie, nous présentons les notions d'ensemble mince et de graphe d'arêtes.

Commençons par quelques rappels et définitions élémentaires sur les graphes.

Soit $p \in V$ et $P \subseteq V$, nous rappelons que :

- $\Gamma^*(p) = \{q \in V \mid \{p, q\} \in E\}$;
- $\Gamma(p) = \Gamma^*(p) \cup \{p\}$;
- $\Gamma(P) = [\bigcup \{\Gamma(p) \mid p \in P\}]$; et
- $\Gamma^*(P) = \Gamma(P) \setminus P$.

Si P et Q sont deux sous-ensembles de V et si $\Gamma(P) \cap Q \neq \emptyset$, nous disons que Q est *adjacent* à P . Soit $G' = (V', E')$ un graphe, on dit que G et G' sont *isomorphiques* s'il existe une bijection f de V dans V' telle que, pour tous sommets x et y de G , y appartient à $\Gamma(x)$ si et seulement si $f(y)$ appartient à $\Gamma_{G'}(f(x))$.

Dans le chapitre précédent nous avons abordé les notions de W-amincissement ensembliste et de clivage qui reposent sur la suppression de points unconnectés. Dans la suite du présent chapitre, et en particulier dans notre analyse des méthodes de fusion de régions, nous cherchons à caractériser les invariants préservés (ou non) lors de la suppression d'autres types de points.

Définition 25 Soit $P \subseteq V$, et soit $p \in P$.

On dit que p est un point de bord (pour P) si p est adjacent à \overline{P} .

On dit que p est un point intérieur (pour P) si p n'est pas un point de bord pour P .

On dit que p est séparant (pour P) si p est adjacent à au moins deux composantes de \overline{P} .

On dit que p est un point multiple (pour P) si p est adjacent à au moins trois composantes de \overline{P} .

Étant donné un ensemble de sommets P , tout élément de P est soit un point intérieur soit un point de bord. Tout point de bord est soit unconnecté, soit séparant et tout point multiple est nécessairement un point séparant.

Dans l'exemple de la Figure 2.2a, p est à la fois un point de bord et un point unconnecté pour l'ensemble P constitué des sommets noirs ; q est un point intérieur. Dans la Figure 2.2b, z est un point de bord qui est séparant, et w est un point de bord séparant et multiple.

Dans ce chapitre, nous étudions certaines propriétés de minceur des clivages. Les notions de minceur et d'intérieur sont étroitement liées.

Définition 26 (ensemble mince) Soit $P \subseteq V$, l'intérieur de P , noté $\text{int}(P)$, est l'ensemble des points intérieurs pour P . On dit que l'ensemble P est mince si $\text{int}(P) = \emptyset$.

En d'autres termes, l'intérieur d'un ensemble P est $\text{int}(P) = \{p \in P \mid \Gamma(p) \subseteq P\}$.

Dans la Figure 2.2b, l'ensemble de sommets noirs est mince. En revanche, celui de la Figure 2.2a n'est pas mince.

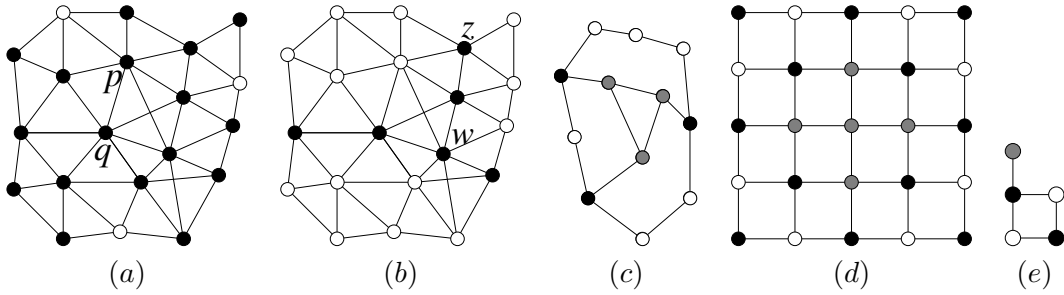


FIG. 2.2 – Clivages minces et non-minces.

(a) : Un graphe G et un ensemble P (points noirs) de sommets de G . (b) : Le sous-ensemble formé des sommets noirs est un clivage mince ; c'est également un clivage de l'ensemble P de la sous-figure (a). Les points de bord z et w sont tous deux séparant, seul w est un point multiple. (c, d, e) : Le sous-ensemble constitué des points noirs et gris est un clivage non-mince dont l'intérieur est représenté en gris.

Un clivage est un ensemble qui ne contient pas de point unconnecté, cependant, comme le montrent les exemples de la figure ci-dessus, un tel ensemble n'est pas nécessairement mince (au sens de la Définition 26). Les Figures. 1.3d et 2.2b présentent des exemples de clivages minces : dans chacun des cas, l'ensemble des sommets noirs ne contient ni point unconnecté ni point intérieur. Les Figures. 2.2c,d et e présentent trois exemples de clivages non-minces (ensembles de points noirs et gris).

Nous concluons cette section par un rappel de la définition de *graphe d'arêtes* (*line graph* en anglais) [4]. Cette classe de graphes permet d'établir un lien fort entre l'approche développée dans ce chapitre où un clivage est constitué de sommets et les approches reposant sur une séparation constituée uniquement d'arêtes.

Définition 27 Le graphe d'arêtes de G est le graphe G' tel que $V(G') = E$ et $\{u, v\}$ est une arête de G' si $u \in E$, $v \in E$, et u et v partagent exactement un sommet de G , i.e., $|u \cap v| = 1$. On dit que G est un graphe d'arête s'il existe un graphe G' tel que G est isomorphe au graphe d'arêtes de G' .



FIG. 2.3 – Graphe d'arêtes.
Un graphe (a) et son graphe d'arêtes (b).

La Figure 2.3 illustre la définition précédente. Le graphe (b) est le graphe d'arêtes de (a). Dans la Figure 2.3b, l'ensemble des sommets noirs est un clivage. Les arêtes correspondantes (en gras) dans le graphe d'origine (a) forment un "clivage sur les arêtes" (ou *coupure*). Ce type de séparation sera étudié en détail au Chapitre 4.

Tous les graphes ne sont pas des graphes d'arêtes. En d'autres termes, il existe certains graphes qui ne sont le graphe d'arêtes d'aucun graphe. Le théorème suivant caractérise les graphes d'arêtes.

Théorème 28 ([18]) Le graphe G est un graphe d'arêtes si et seulement si aucun des graphes de la Figure 2.4 n'est isomorphe à un sous-graphe induit par un ensemble de sommets de G .

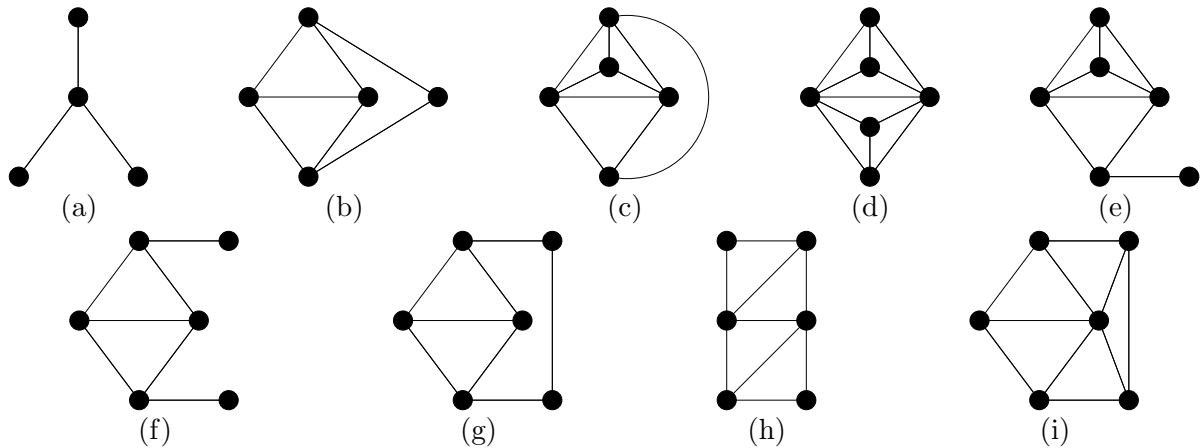


FIG. 2.4 – Graphes permettant de caractériser les graphes d'arêtes.

Illustrons le théorème précédent sur le graphe G de la Figure 2.3b. Pour cela, on peut vérifier qu'aucun des graphes de la Figure 2.4 ne peut être induit par un sous-ensemble des sommets

de G . Par exemple, le sous-graphe de G induit par $\{d, e, f, g\}$ n'est pas le même que celui de la Figure 2.4a car il contient une arête supplémentaire $(\{d, f\})$.

2.3 Fusion de régions

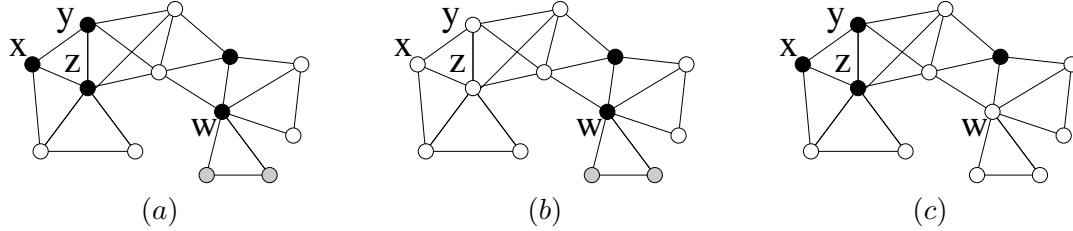


FIG. 2.5 – Fusion.

(a) : Un graphe G et un sous-ensemble P de ses sommets (points noirs). (b) : Les points noirs représentent $P \setminus \{x, y, z\}$. (c) : Les points noirs représentent $P \setminus \{w\}$.

Dans cette section nous étudions la fusion de régions dans les graphes et les difficultés engendrées par cette opération. En particulier, nous proposons plusieurs propriétés permettant de caractériser les (paires de) régions qui peuvent être fusionnées. Afin de donner une idée intuitive de ce problème, commençons par un exemple.

Considérons le graphe G de la Figure 2.5a. Le sous-ensemble P composé des sommets noirs sépare son complémentaire \overline{P} en quatre régions : les composantes connexes blanches et grises. Si l'on supprime de l'ensemble P l'ensemble S composé des sommets x, y et z , on obtient un nouvel ensemble $(P \setminus S)$ qui sépare son complémentaire en 3 régions (cf. Figure 2.5b) : on peut également dire que nous avons “fusionné deux composantes de \overline{P} à travers S ”. Cette opération peut être perçue comme une “fusion élémentaire” dans le sens où exactement deux composantes de \overline{P} ont été fusionnées. En revanche, remplacer l'ensemble P par l'ensemble $P \setminus S'$ (où $S' = \{w\}$, cf. Figure 2.5c) fusionnerait trois composantes de \overline{P} et ne correspondrait donc pas à une “fusion élémentaire”. Il peut également être remarqué que la composante de \overline{P} qui se situe sous w (en gris clair) ne peut être fusionnée par “fusion élémentaire”. En effet toute tentative de fusion impliquerait le point w , et donc aussi les trois composantes de \overline{P} adjacentes à ce point. Dans cette section, nous introduisons les définitions et les propriétés élémentaires se rapportant à de telles opérations de fusion.

Définition 29 Soient $P \subset V$ et $p \in P$. On dit que p est F-simple (pour P) si p est adjacent à exactement deux composantes de \overline{P} .

Soit $S \subseteq P$. On dit que S est F-simple (pour P) si S est adjacent à exactement deux composantes A et B de \overline{P} telles que $A \cup B \cup S$ est connexe.

Dans cette définition, le préfixe “F-” est utilisé pour fusion. Observons qu'un point p d'un ensemble $P \subseteq V$ est F-simple si et seulement si $\{p\}$ est F-simple. Par exemple, dans la Figure 2.5a, le point z est F-simple alors que les points x, y et w ne le sont pas. Les ensembles $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ et $\{x, y, z\}$ sont également F-simples, mais les ensembles $\{x\}$, $\{y\}$ et $\{w\}$ ne le sont pas.

Nous pouvons également noter qu'un ensemble S qui est F-simple pour $P \subseteq V$ n'est pas nécessairement connexe. De plus, si A et B sont deux composantes de \overline{P} adjacentes à S , toute

composante T de S est adjacente soit à A , soit à B , ou soit aux deux ; la composante T ne peut être adjacente à aucune autre composante de \overline{P} .

Nous définissons maintenant, grâce aux ensembles F -simples, la notion de composantes qui peuvent être fusionnées.

Définition 30 Soit $P \subset V$. Soit A et B deux composantes distinctes de \overline{P} . On dit que A et B peuvent être fusionnées (pour P) s'il existe $S \subseteq P$ F -simple pour P tel que A et B sont précisément les deux composantes de \overline{P} adjacentes à S . Dans ce cas, on dit aussi que A et B peuvent être fusionnées à travers S (pour P).

On dit que A peut être fusionnée (pour P) s'il existe une composante B de \overline{P} telle que A et B peuvent être fusionnées pour P .

Par exemple, dans la Figure 2.5a, la composante de \overline{P} en gris clair ne peut pas être fusionnée, mais chacune des trois composantes blanches peuvent être fusionnées pour P .

2.4 Graphes de fusion

La fusion de régions [27, 31, 54, 55] (voir aussi [6, 9]) est une approche populaire en segmentation d'image. À partir d'une segmentation initiale des pixels de l'image en régions connexes – qui sont, dans certains cas, séparées par des pixels formant une frontière – l'idée est de progressivement fusionner des paires de régions voisines jusqu'à ce qu'un certain critère soit satisfait. Les critères utilisés pour identifier la prochaine paire de régions devant être fusionnée et la condition d'arrêt sont spécifiques à chaque méthode. Certaines méthodes n'utilisent pas d'ensemble de sommets pour séparer les régions (voir par exemple Section 1.3.4). Néanmoins, ces approches sont également intégrées au cadre étudié à travers l'utilisation des graphes d'arêtes (Définition 27).

Les Sections 2.3 et 2.4 posent les fondements théoriques pour l'étude des méthodes de fusion de régions. Les problèmes rencontrés par certaines d'entre elles (voir, en particulier, [6], section 5.6 : “When three regions meet” [“Où trois régions se rencontrent”]) peuvent être contournés en utilisant exclusivement la notion de fusion introduite dans la section précédente. Pour cela, nous définissons et étudions plusieurs classes de graphes en considérant les possibilités de “blocages” des processus de fusion de régions. Le résultat le plus marquant est un théorème qui établit l'équivalence entre l'une de ces classes et la classe des graphes dans lesquels tout clivage est mince.

Soit $P \subseteq V$, et soient A et B deux composantes de \overline{P} . On pose $\Gamma^*(A, B) = \Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$. On dit que A et B sont voisines si $A \neq B$ et $\Gamma^*(A, B) \neq \emptyset$.

Nous commençons par définir quatre classes de graphes.

Définition 31 (graphe de fusion faible) On dit que le graphe G est un graphe de fusion faible si, pour tout sous-ensemble de sommets $P \subseteq V$ tel que $|\mathcal{C}(\overline{P})| \geq 2$, il existe A et B , deux composantes de \overline{P} qui peuvent être fusionnées.

Définition 32 (graphe de fusion) On dit que le graphe G est un graphe de fusion si, pour tout sous-ensemble de sommets $P \subseteq V$ tel que $|\mathcal{C}(\overline{P})| \geq 2$, chaque composante de \overline{P} peut être fusionnée.

Définition 33 (graphe de fusion fort) On dit que le graphe G est un graphe de fusion fort si, pour tout sous-ensemble de sommets $P \subseteq V$, toutes composantes A et B de \overline{P} qui sont voisines peuvent être fusionnées.

Définition 34 (graphe de fusion parfait) On dit que le graphe G est un graphe de fusion parfait si, pour tout sous-ensemble de sommets $P \subseteq V$, toutes composantes A et B de \overline{P} qui sont voisines peuvent être fusionnées à travers $\Gamma^*(A, B)$.

Des exemples et contre-exemples élémentaires de graphes de fusion faibles, de fusion, de fusion forts et de fusion parfaits sont présentés Figure 2.6.

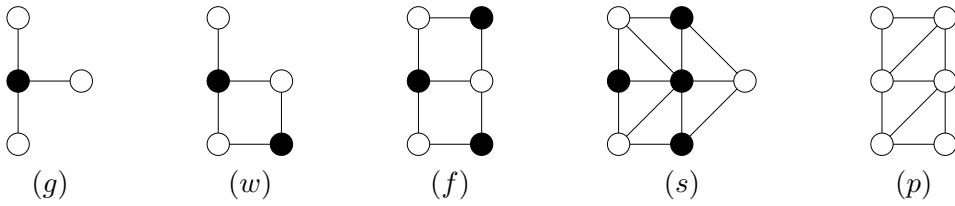


FIG. 2.6 – Exemples et contre-exemples des différentes classes de graphes de fusion.

(g) : Un graphe qui n'est pas un graphe de fusion faible, (w) : un graphe de fusion faible qui n'est pas un graphe de fusion, (f) : un graphe de fusion qui n'est pas un graphe de fusion fort,

(s) : un graphe de fusion fort qui n'est pas un graphe de fusion parfait, (p) : un graphe de fusion parfait qui n'est pas un graphe d'arête. Dans les graphes (g, w, f, s), les sommets noirs constituent des ensembles qui permettent de montrer que ces graphes n'appartiennent pas aux classes pré-citées.

Ces classes de graphes sont liées par des relations d'inclusion. La propriété suivante clarifie ces liens et positionne aussi les quatre classes de graphes de fusion par rapport aux graphes généraux et aux graphes d'arêtes.

On dénote par \mathcal{G} (resp. \mathcal{G}_L , \mathcal{G}_P , \mathcal{G}_S , \mathcal{G}_F , et \mathcal{G}_W) l'ensemble de tous les graphes (resp. graphes d'arêtes, graphes de fusion parfaits, graphes de fusion forts, graphes de fusion, et graphes de fusion faibles).

Propriété 35 (Propriété 30, Annexe A) Tout graphe d'arêtes est un graphe de fusion parfait,

tout graphe de fusion parfait est un graphe de fusion fort,

tout graphe de fusion fort est un graphe de fusion,

tout graphe de fusion est un graphe de fusion faible.

Plus précisément, nous avons les quatre inclusions strictes suivantes :

$$\mathcal{G}_L \subset \mathcal{G}_P \subset \mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_F \subset \mathcal{G}_W \subset \mathcal{G}.$$

Pour illustrer que ces inclusions sont strictes, il peut être vérifié facilement à partir des définitions que les graphes (g), (w), (f) et (s) sont des contre-exemples pour les égalités correspondantes entre les classes. En conséquence du Théorème 28, on remarque également que le graphe (p) est un graphe de fusion parfait, alors que ce n'est pas un graphe d'arêtes.

Avant d'aller plus loin dans l'étude de ces graphes, illustrons d'un point de vue plus algorithmique ces différentes classes. Pour cela, considérons un sous-ensemble P de V – par exemple un clivage – et les quatre procédures suivantes de fusion.

- A** (i) : supprimer une région (composante) quelconque de \overline{P} par fusion ; (ii) : répéter l'étape (i) tant qu'une certaine condition d'arrêt n'est pas satisfaite, *e.g.*, \overline{P} contient exactement k (un nombre prédéfini) régions.
- B** (i) : Déterminer la région la moins significative au sens d'un critère prédéfini, *e.g.*, la plus petite ; (ii) : supprimer cette région en la fusionnant avec une deuxième région quelconque ; (iii) : répéter (i) et (ii) tant qu'une certaine condition d'arrêt n'est pas satisfaite.
- C** (i) : déterminer une paire de régions voisines qui ne devraient pas être séparées, par exemple, au sens d'un critère de similarité ; (ii) : fusionner ces deux régions ; (iii) : répéter (i) et (ii) tant qu'une certaine condition d'arrêt n'est pas satisfaite.
- D** (i) : déterminer une paire de régions voisines qui ne devraient pas être séparées ; (ii) : fusionner ces deux régions en supprimant l'ensemble des points adjacents à la fois à l'une et à l'autre ; (iii) : répéter (i) et (ii) tant qu'un certain critère d'arrêt n'est pas vérifié.

Pour pouvoir démontrer que la procédure **A** (resp. **B**, **C**, **D**) produit le résultat attendu, il est nécessaire que le graphe G sous-jacent soit un graphe de fusion faible (resp. un graphe de fusion, un graphe de fusion fort, un graphe de fusion parfait).

Nous présentons maintenant le théorème principal de cette section. Il établit que la classe des graphes dans lesquels tout clivage est mince est précisément celle des graphes de fusion. Une conséquence immédiate de ce théorème et de la Propriété 35 est que tout clivage dans un graphe de fusion, un graphe de fusion fort, un graphe de fusion parfait et un graphe d'arêtes est mince.

Nous rappelons qu'un clivage dans G est un ensemble de sommets $P \subseteq V$ tel que P ne peut être réduit par enlèvement de points sans changer le nombre de composantes connexes de son complémentaire \overline{P} . Nous disons qu'un clivage P est *non-trivial* si \overline{P} contient au moins une composante connexe non-vide.

Théorème 36 (Théorème 33, Annexe A) *Un graphe G est un graphe de fusion si et seulement si tout clivage non-trivial dans G est mince.*

Illustrons cette propriété sur quelques exemples concrets. Les graphes des Figures. 2.2c et d ne sont pas des graphes de fusion – ce ne sont en fait même pas des graphes de fusion faibles –. On remarque qu'ils peuvent, en effet, contenir un clivage non-mince. Le graphe de la Figure 2.6w est un exemple de graphe de fusion faible qui n'est pas un graphe de fusion (voir également le graphe de la Figure 2.2e avec un clivage non-mince).

Nous terminons cette section par une propriété élégante des graphes de fusion parfaits qui peut s'avérer utile pour mettre en œuvre des méthodes hiérarchiques de segmentation utilisant les clivages. Considérons l'exemple de la Figure 2.7a, où un clivage P (sommets noirs) sépare son complémentaire \overline{P} en deux composantes. Considérons maintenant l'ensemble Q (sommets gris) qui est un clivage dans le sous-graphe induit par l'une des composantes de \overline{P} . On note que l'union de ces deux clivages, $P \cup Q$, n'est en revanche pas un clivage. En effet, le point x est unconnecté pour $P \cup Q$. Ce genre de configuration pose un problème pour les procédures de segmentation reposant, par exemple, sur la division de régions ("region splitting", en anglais) [31, 32]. La Propriété 37 montre que ce genre de problèmes n'existe pas dans les graphes de fusion parfaits (voir, par exemple, Figure 2.7b).

Propriété 37 (Propriété 34, Annexe A) *Si G est un graphe de fusion parfait, alors pour tout clivage $P \subset E$ dans G et pour tout clivage $Q \subset A$ dans G_A , où A est une composante de \overline{P}*



FIG. 2.7 – Division de région.

Illustration de la Propriété 37. (a) : Le graphe n'est pas un graphe de fusion parfait (cf. Section 2.6, Propriété 42), et l'union des clivages (sommets gris et noirs) n'est pas un clivage. (b) : Le graphe est un graphe de fusion parfait (cf. Section 2.7, Propriété 45), la propriété est vérifiée ; l'union des sommets gris et noirs est un clivage.

et G_A est le sous-graphe de G induit par cette composante A , l'ensemble $P \cup Q$ est un clivage dans G .

2.5 Caractérisations locales

Les graphes de fusion faibles, fusion, fusion forts et fusion parfaits sont définis par des conditions qui doivent être vérifiées pour tous les sous-ensembles de sommets du graphe. Ainsi, en utilisant une méthode directe reposant sur les définitions, vérifier si un graphe appartient à l'une de ces classes nécessite un temps de calcul exponentiel par rapport aux nombres de sommets du graphe.

A contrario, les graphes d'arêtes peuvent être reconnus grâce à une condition qui peut être vérifiée indépendamment dans un voisinage limité de chaque sommet. Existe-t-il de telles caractérisations pour les quatre classes de graphes de fusion ? Nous montrons dans cette section que les graphes de fusion faibles et les graphes de fusion ne peuvent pas être caractérisés localement et donnons des conditions locales qui caractérisent les graphes de fusion forts et les graphes de fusion parfaits.

Soit X un graphe, soit $x \in V(X)$ et $k \in \mathbb{N}$, nous dénotons par $\Gamma_X^k(x)$ le *voisinage d'ordre k de x* , c'est à dire, $\Gamma_X^k(x) = \Gamma_X(\Gamma_X^{k-1}(x))$, où $\Gamma_X^0(x) = \{x\}$.

Nous disons qu'il existe une caractérisation locale d'une classe de graphes s'il existe k un entier positif arbitraire et \mathcal{P} une propriété sur les graphes tels qu'un graphe X est dans cette classe si et seulement si pour tout sommet x de X , $\mathcal{P}[X(x, k)]$ est vraie, $X(x, k)$ étant le sous-graphe de X induit par $\Gamma_X^k(x)$.

Propriété 38 (Propriétés 35 et 36, Annexe A) *i) Il n'existe pas de caractérisation locale des graphes de fusion faibles.*

ii) Il n'existe pas de caractérisation locale des graphes de fusion.

Soient p et q deux sommets de G , on dit que p et q sont *2-adjacents* si $q \notin \Gamma(p)$ et $\Gamma^*(p) \cap \Gamma^*(q) \neq \emptyset$.

Théorème 39 (Théorème 40, Annexe A) *Le graphe G est un graphe de fusion fort si et seulement si, pour toute paire de points $p, q \in V$ qui sont 2-adjacents, il existe $a \in \Gamma^*(p)$ et $b \in \Gamma^*(q)$ tels que a et b sont adjacents et $\Gamma(\{a, b\}) \subseteq [\Gamma(p) \cap \Gamma(q)]$.*

Nous rappelons que dans les graphes de fusion parfaits, toute paire de composantes voisines A et B de \overline{P} ($P \subseteq V$) peut être fusionnée à travers $\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$. Ainsi, les graphes de fusion parfaits constituent un cadre idéal pour les méthodes de fusion de régions. Dans les propriétés suivantes, nous utilisons le symbole G^\blacktriangle pour dénoter le graphe (a) de la Figure 2.4.

Théorème 40 (Théorème 41, Annexe A) *Les huit propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) G est un graphe de fusion parfait ;
- ii) pour tout $x \in E$, tout sous-ensemble de $\Gamma(x)$ contient au plus deux composantes connexes ;
- iii) pour tout clivage non-trivial $P \subseteq V$, chaque point p appartenant à P est F -simple ;
- iv) pour tout sous-ensemble connexe A de V , le sous-graphe de G induit par A est un graphe de fusion ;
- v) pour tout sous-ensemble P de V , il n'existe aucun point multiple pour P ;
- vi) le graphe G^\blacktriangle n'est induit par aucun sous-ensemble de sommets de G ;
- vii) tous sommets p, q et r de G , mutuellement non-adjacents, sont tels que $\Gamma(p) \cap \Gamma(q) \cap \Gamma(r) = \emptyset$;
- viii) pour toute paire de points $p, q \in V$ qui sont 2-adjacents, tout sommet $r \in \Gamma^*(p) \cap \Gamma^*(q)$ est tel que $\Gamma(r) \subseteq [\Gamma(p) \cup \Gamma(q)]$.

Remarquons que la proposition *viii* ressemble fortement à la caractérisation locale des graphes de fusion forts (Théorème 39). Nous rappelons que tout graphe d'arêtes est un graphe de fusion parfait (Propriété 35). Nous pouvons voir, grâce au Théorème 40 (condition *vi*), que les graphes de fusion parfaits peuvent être caractérisés d'une manière similaire au Théorème 28 qui caractérise les graphes d'arêtes, mais avec une condition beaucoup plus simple. Remarquons, à titre d'illustration, que tous les graphes de la Figure 2.4 exceptés G^\blacktriangle sont des graphes de fusion parfaits, car G^\blacktriangle n'est un sous-graphe d'aucun de ces graphes.

2.6 Grilles d'adjacence usuelles en analyse d'image

L'objectif de cette section et de la suivante est de répondre à la question : quelles sont les grilles (relations d'adjacence) qui peuvent être utilisées pour effectuer des opérations de fusion maîtrisées sur des images digitales ? Dans cette section, nous considérons les différentes grilles utilisées communément pour l'analyse d'images bidimensionnelles et tridimensionnelles. Notre résultat principal est qu'aucune de ces grilles n'est un graphe de fusion parfait, certaines n'étant pas même des graphes de fusion. Nous montrons ainsi que l'opération de fusion la plus simple, qui consiste à fusionner deux régions à travers leur voisinage commun, n'est pas une opération maîtrisée dans ces grilles.

Dans cette section et la suivante nous supposons que n est un entier strictement positif.

Soit P un ensemble, P^n est le produit cartésien de n copies de P . Tout élément p de P^n peut être interprété comme une application de $\{1, \dots, n\}$ dans P , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, p_i est la i -ème coordonnée de p .

Nous considérons les familles d'ensembles H_0^1, H_1^1 telles que $H_0^1 = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $H_1^1 = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Un sous-ensemble C de \mathbb{Z}^n qui est le produit cartésien d'exactly $m \leq n$ éléments de H_1^1 et $(n-m)$ éléments de H_0^1 est un m -cube.

Pour munir d'une structure de graphe les images digitales, des relations d'adjacence sont définies sur \mathbb{Z}^n . Les définitions suivantes permettent de retrouver les relations d'adjacence utilisées le plus fréquemment en analyse d'image comme par exemple les 4- et 8- adjacence sur \mathbb{Z}^2 .

Définition 41 Soit $m \leq n$, deux éléments distincts x et y de \mathbb{Z}^n sont m -adjacents s'il existe un m -cube qui contient à la fois x et y . Nous définissons E_m^n la relation telle que pour tous x et y dans \mathbb{Z}^n , $\{x, y\} \in E_m^n$ si et seulement si x et y sont m -adjacents.

Afin de manipuler des graphes qui peuvent être arbitrairement grands, nous définissons une grille comme une paire (\mathbb{Z}^n, E) , où E est un sous-ensemble de $\{\{x, y\} \mid x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^n, x \neq y\}$. Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n$, la restriction de (\mathbb{Z}^n, E) à \mathcal{D} est la paire $(\mathcal{D}, E_{\mathcal{D}})$ telle que $E_{\mathcal{D}} = \{\{x, y\} \in E \mid x \in \mathcal{D}, y \in \mathcal{D}\}$. Si \mathcal{D} est un ensemble fini, alors $(\mathcal{D}, E_{\mathcal{D}})$ est un graphe. Dans la suite, pour simplifier les notations, nous omettons l'indice \mathcal{D} et écrivons donc E à la place de $E_{\mathcal{D}}$.

Examinons tout d'abord le cas des grilles bidimensionnelles usuelles.

Propriété 42 (Propriétés 45 et 47, Annexe A) Soient w et h deux entiers positifs tels que $w > 2$ et $h > 2$. Soit $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x_1 < w \text{ et } 0 \leq x_2 < h\}$.

i) Si $\{w, h\} \neq \{3, 4\}$, alors (\mathcal{D}, E_1^2) n'est pas un graphe de fusion faible. Si $\{w, h\} = \{3, 4\}$, alors (\mathcal{D}, E_1^2) est un graphe de fusion faible mais pas un graphe de fusion.

ii) Le graphe (\mathcal{D}, E_2^2) est un graphe de fusion mais n'est pas un graphe de fusion fort.

Dans la littérature (tout comme dans le Chapitre 1), la relation E_1^2 (resp. E_2^2) est généralement appelée 4- (resp. 8-) adjacence. Les affirmations suivantes sont des conséquences directes de cette propriété, des définitions des graphes de fusion et du Théorème 36.

Soit P un sous-ensemble de pixels d'une image de dimension supérieure à 3×4 .

- Si l'image est équipée de la 4-adjacence, alors il est possible qu'aucune des composantes de \overline{P} ne puisse être fusionnée (voir, par exemple, l'ensemble des sommets noirs Figure 2.8a).
- Si l'image est équipée de la 4-adjacence et si P est un clivage, alors il est possible que P ne soit pas mince (voir, par exemple, l'ensemble des sommets noirs et gris Figure 2.8a).
- Si l'image est équipée de la 8-adjacence, alors il est possible que deux régions voisines de \overline{P} ne puissent être fusionnées (voir, par exemple, la Figure 2.8b).
- Si l'image est équipée de la 8-adjacence et si P est un clivage alors P est nécessairement mince.

Examinons maintenant le cas des grilles tridimensionnelles usuelles.

Propriété 43 (Propriétés 49 et 50, Annexe A) Soient w , h et d trois entiers strictement supérieurs à 1. Soit $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq x_1 < w, 0 \leq x_2 < h \text{ et } 0 \leq x_3 < d\}$.

i) Le graphe (\mathcal{D}, E_1^3) n'est pas un graphe de fusion faible.

ii) Si $w \geq 5$, $h \geq 5$, $d \geq 5$, alors le graphe (\mathcal{D}, E_3^3) n'est pas un graphe de fusion.

Dans la littérature, la relation E_1^3 (resp. E_3^3) est généralement appelée 6- (resp. 26-) adjacence.

Soit P un sous-ensemble de voxels d'une image de dimension supérieure à $5 \times 5 \times 5$.

- Si l'image est équipée de la 6-adjacence, alors il est possible qu'aucune des composantes de \overline{P} ne puisse être fusionnée.

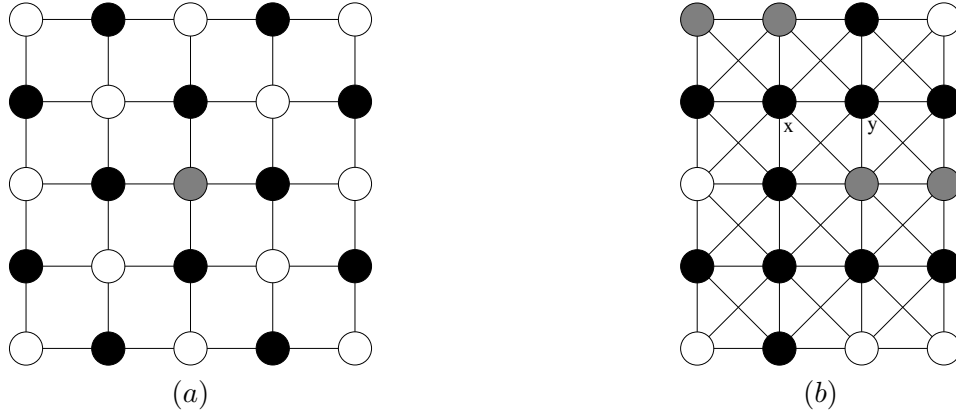


FIG. 2.8 – Propriétés de fusion dans les grilles bidimensionnelles usuelles.

(a), Un graphe correspondant à la 4-adjacence sur un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . Aucune des composantes blanches ne peut être fusionnée ; (b), un graphe correspondant à la 8-adjacence sur un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . Les deux composantes en gris du complémentaire des sommets noirs sont voisines mais ne peuvent pas être fusionnées.

- Si l'image est équipée de la 6-adjacence, et si P est un clivage, alors il est possible que P ne soit pas mince.
- Si l'image est équipée de la 26-adjacence, alors il est possible qu'aucune des composantes de \bar{P} ne puisse être fusionnée (voir, par exemple, la Figure 2.9).
- Si l'image est équipée de la 26-adjacence et si P est un clivage, alors il est possible que P ne soit pas mince.

2.7 Grille de fusion parfaite

Nous introduisons maintenant une grille pour structurer les images n -dimensionnelles et prouvons que c'est un graphe de fusion parfait, quelle que soit la dimension n . Il s'agit donc d'une structure dans laquelle la fusion de régions peut être maîtrisée.

Donnons tout d'abord une intuition de cette grille. Les Figure 2.11b et c illustrent la grille de fusion parfaite en 2D. La Figure 2.10a montre un clivage de l'image Figure 2.1a obtenu sur cette grille. On observe que les problèmes pointés dans l'introduction du chapitre n'existent pas dans ce cas. Le clivage ne contient aucun point intérieur. Toute paire de régions voisines peut être fusionnée en retirant du clivage l'ensemble des points adjacents aux deux régions (cf Figure 2.10b et c). De plus, l'ensemble obtenu est toujours un clivage.

Il peut être remarqué que cette grille est “entre” les grilles usuelles. Dans un article en préparation, nous montrons que cette grille est le seul graphe de fusion parfait (à une translation près) vérifiant une telle propriété.

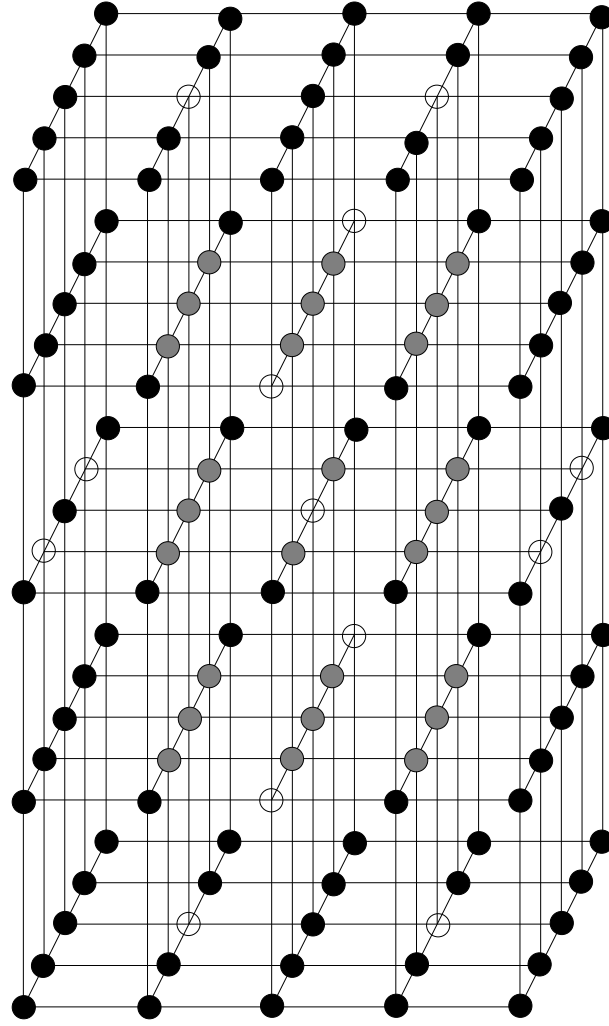


FIG. 2.9 – Contre-exemple pour la propriété de fusion de E_3^3 . Les points blancs représentent un sous-ensemble P de \mathbb{Z}^3 . La composante de P constituée du point central ne peut pas être fusionnée si l'on munit \mathbb{Z}^3 de la relation E_3^3 (26-adjacence).

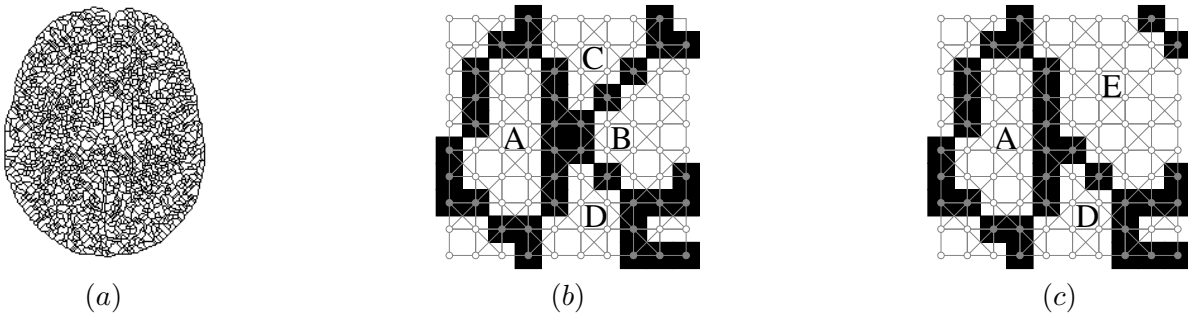


FIG. 2.10 – Fusion de régions dans une grille de fusion parfaite. (a), Un clivage dérivé de la Figure 2.1a obtenu dans la grille de fusion parfaite; (b), Une zone de (a) où les régions A , B , C et D correspondent à celles montrées Figure 2.1c; en gris, la grille de fusion parfaite associée est superposée; (c), idem à (b) après avoir fusionné B et C pour former une nouvelle région appelée E .

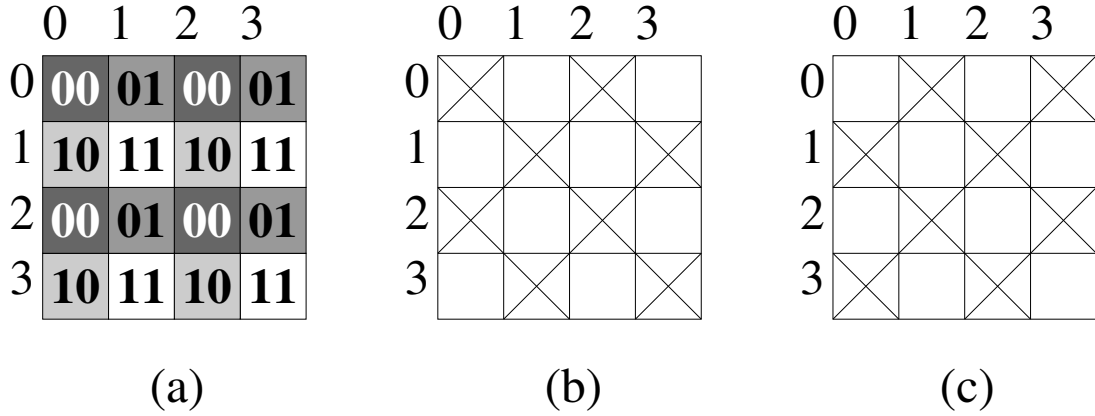


FIG. 2.11 – Les deux grilles de fusion parfaites sur \mathbb{Z}^2 .
 (a) : L'application f ; (b) : $(\mathbb{Z}^2, E^2_{11/00})$; (c) : $(\mathbb{Z}^2, E^2_{10/01})$.

Soit C^n l'ensemble de tous les n -cubes de \mathbb{Z}^n , nous définissons l'application B de C^n dans \mathbb{Z}^n telle que pour tout c dans C^n , $B(c)_i = \min\{x_i \mid x \in c\}$, où $B(c)_i$ est la i -ème coordonnée de $B(c)$. Notons que c est égal au produit cartésien : $\{B(c)_1, B(c)_1 + 1\} \times \dots \times \{B(c)_n, B(c)_n + 1\}$. Donc clairement B est une bijection.

Nous posons $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$. Un élément de \mathbb{B}^n est appelé un *mot binaire de longueur n* . Si u est un élément de \mathbb{B}^n , nous définissons le *complémentaire de u* par le mot binaire \bar{u} tel que pour, tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\bar{u})_i = (\bar{u}_i)$.

Soit P un ensemble, on rappelle que $P \otimes P$ est l'ensemble de tous les couples non-ordonnés d'éléments distincts de P : $P \otimes P = \{\{p, q\} \mid p \in P, q \in P, q \neq p\}$.

Définition 44 Soit f l'application de C^n dans \mathbb{B}^n telle que pour tout $c \in C^n$, $f(c)_i$ est égal à $B(c)_i \bmod 2$, c'est-à-dire le reste dans la division entière de $B(c)_i$ par 2.

Soit u un élément de \mathbb{B}^n , nous posons $C_u^n = \{c \in C^n \mid f(c) = u\}$ et $C_{u/\bar{u}}^n = C_u^n \cup C_{\bar{u}}^n$.

On définit la relation d'adjacence binaire $E_{u/\bar{u}}^n \subseteq \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^n$ comme l'ensemble des paires $\{x, y\} \in \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^n$ telles qu'il existe $c \in C_{u/\bar{u}}^n$ qui contient à la fois x et y .

On définit \mathcal{P}^n , la famille des grilles de fusion parfaites sur \mathbb{Z}^n , comme l'ensemble :

$$\mathcal{P}^n = \{(\mathbb{Z}^n, E_{u/\bar{u}}^n) \mid u \in \mathbb{B}^n\}.$$

La Figure 2.11 illustre la précédente définition dans le cas de \mathbb{Z}^2 . La Figure 2.12 montre un clivage dans une grille de fusion parfaite sur \mathbb{Z}^3 . Afin de clarifier la figure, nous avons utilisé la convention suivante : deux points appartenant à un même cube marqué par une bande grise sont adjacents.

Théorème 45 (Propriété 54, Annexe A) Soit $u \in \mathbb{B}^n$ et soit \mathcal{D} un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^n tel que $(\mathcal{D}, E_{u/\bar{u}}^n)$ est connexe. Alors $(\mathcal{D}, E_{u/\bar{u}}^n)$ est un graphe de fusion parfait tel que $E_1^n \subseteq E_{u/\bar{u}}^n \subseteq E_n^n$. De plus, c'est un graphe d'arêtes.

Propriété 46 (Propriété 56, Annexe A) La famille \mathcal{P}^n contient exactement 2^{n-1} grilles de fusion parfaites distinctes.

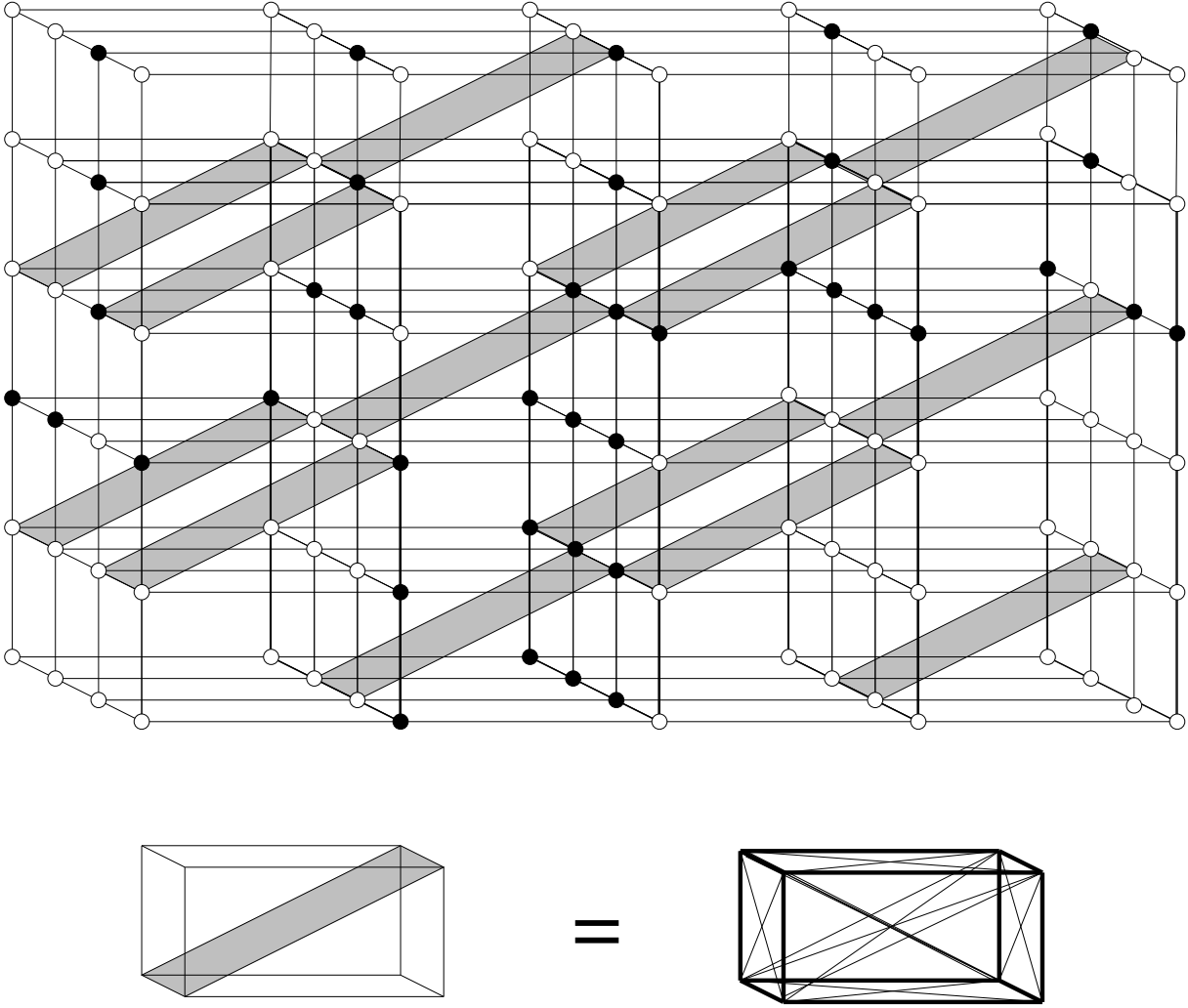


FIG. 2.12 – Une grille de fusion parfaite tridimensionnelle.
Les points noirs constituent un ensemble qui est un clivage.

Soit $P \subseteq \mathbb{Z}^n$, soit $t \in \mathbb{B}^n$ et soit $+$ l'addition vectorielle usuelle sur \mathbb{Z}^n . On définit $P + t = \{x + t \mid x \in P\}$, et on dit que $P + t$ est une *translation binaire* de P . Soit m un entier positif tel que $m \leq n$. On remarque que si P est un m -cube alors $P + t$ est également un m -cube.

Propriété 47 (Propriété 57, Annexe A) Soient u et v deux éléments de \mathbb{B}^n . Soit $t \in \mathbb{B}^n$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si $u_i = \bar{v}_i$ alors $t_i = 1$, sinon $t_i = 0$. Alors pour tout $\{x, y\} \in \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^n$, $\{x, y\} \in E_{u/\bar{u}}^n$ si et seulement si $\{x + t, y + t\} \in E_{v/\bar{v}}^n$.

De manière littérale, quelque soient deux grilles de fusion parfaites n -dimensionnelles, elles sont équivalentes à une translation binaire près.

2.8 Conclusions

Ce chapitre pose un cadre théorique pour l'étude des propriétés de fusion de régions dans les graphes. En utilisant ce cadre, nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour la minceur des clivages, défini quatre classes de graphes en relation avec ces propriétés de fusion et donné des caractérisations locales de ces classes lorsque c'est possible. Nous avons étudié le statut des graphes qui sont le plus utilisés en analyse d'images et proposé une famille de graphes sur \mathbb{Z}^n qui constitue un support intéressant pour les méthodes de fusion de régions dans lesquelles on souhaite disposer d'un contour constitué de sommets du graphes.

Le chapitre suivant propose une étude des LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits. En particulier, nous montrons que, dans ces graphes, toute LPE topologique induit nécessairement une séparation mince. De plus, un algorithme par immersion de complexité linéaire est proposé pour calculer ces séparations.

Chapitre 3

Graphes de fusion : ligne de partage des eaux et fusion de régions

3.1 Introduction

Les méthodes de fusion de régions [27, 6, 54] consistent à améliorer une segmentation initiale en fusionnant itérativement des paires de régions voisines. Étant donnée une segmentation initiale, le chapitre précédent développe un cadre théorique pour étudier les propriétés de fusion dans les graphes. Un *clivage* (Définition 3) est un ensemble qui ne peut être réduit sans changer le nombre de composantes connexes de son complémentaire. Cette notion formalise l'idée d'ensemble frontière. Dans le cas général, un clivage peut être épais et ainsi la relation induite de voisinage entre régions ne possède pas nécessairement de bonnes propriétés pour la fusion. Un résultat important du chapitre précédent (Théorème 36) établit l'équivalence entre la classe des graphes dans lesquels tout clivage est mince et celle des graphes dans lesquels toute région peut être fusionnée avec l'une de ces voisines en préservant toutes les autres régions.

Dans ce chapitre (voir également [90, 112, 84]), nous étudions une question différente mais non moins essentielle pour les méthodes de fusion de régions. Étant donnée une image en niveau de gris, comment extraire une segmentation initiale qui permette de garantir la stabilité des critères de sélection des régions à fusionner ? Afin d'identifier la prochaine paire de régions à fusionner ou bien pour déterminer la condition d'arrêt du processus, les méthodes hiérarchiques utilisent souvent le niveau de gris des pixels appartenant au clivage initial. En particulier, en morphologie mathématique [98, 50, 102], certaines méthodes reposent implicitement sur le fait que le clivage initial satisfait une contrainte fondamentale. Le niveau de gris de ses pixels doit permettre de retrouver les valeurs de connexion (une notion de contraste, voir Définition 18) entre les paires de minima de l'image. D'un point de vue topographique, la valeur de connexion entre deux minima A et B peut être intuitivement interprétée comme l'altitude minimale que doit atteindre une inondation globale du relief pour fusionner les lacs qui inondent A et B .

L'approche topologique de la LPE [104, 71, 73, 72], présentée Chapitre 1, s'intéresse à une transformation qui abaisse les valeurs de l'image tout en préservant la connexité de chacune de ses sections (seuils) inférieures. Cette transformation (ainsi que son résultat) est appelée *W-amincissement* ; une LPE topologique étant un *W-amincissement minimal*. Nous appelons *séparation induite* par une fonction l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun minimum. La séparation induite par une LPE topologique constitue une segmentation initiale intéressante

pour les méthodes de fusion. En effet, il a été démontré [71, 72] que les W-amincissements sont les seules transformations – par abaissement de valeurs – qui permettent d’obtenir une séparation préservant les valeurs de connexion entre minima. Ainsi, la séparation induite par un W-amincissement constitue un point d’entrée intéressant pour de nombreuses méthodes de fusion de régions.

De manière surprenante, les séparations induites par les algorithmes de LPE [38, 95, 41], et en particulier par ceux de LPE topologiques, ne sont pas toujours des clivages et peuvent parfois être épaisses, même dans les graphes de fusion.

Dans ce chapitre, nous étudions une notion de minceur pour les fonctions et obtenons une caractérisation locale de la classe des graphes dans lesquels toute LPE topologique est nécessairement mince. Néanmoins, même dans de tels graphes, les séparations induites par les LPE topologiques ne sont pas nécessairement des clivages.

Pour cette raison, nous introduisons une transformation, appelée C-LPE, qui procède par abaissement de valeurs et induit des séparations qui sont nécessairement des clivages. La classe des graphes de fusion parfaits (Définition 34) est un cadre idéal pour les méthodes de fusion. Dans ces graphes, deux régions voisines peuvent toujours être fusionnées à travers leur voisinage commun sans effet de bord indésirable induit par la fusion d’une troisième région. La *grille de fusion parfaite* (Définition 44) est un graphe de fusion parfait régulier dont les sommets sont \mathbb{Z}^n . Cette grille se situe entre les graphes induits par les relations d’adjacence directe et indirecte qui généralisent les 4- et 8-adjacences à \mathbb{Z}^n . Elle est donc adaptée aux applications de la fusion de régions en analyse d’image. Dans ce chapitre, nous démontrons que, dans les graphes de fusion parfaits, toute C-LPE est un W-amincissement et donc vérifie la propriété de préservation de contraste requise par les méthodes morphologiques. De plus, nous obtenons une caractérisation locale de la classe des graphes dans lesquels cette propriété est vérifiée. Nous avons démontré (Propriété 35) que tout graphe de fusion parfait est un graphe de fusion. Comme toute C-LPE induit un clivage et que tout clivage dans un graphe de fusion est mince, nous déduisons que les séparations induites par les C-LPE sont minces dans les graphes de fusion parfaits. Ces propriétés montrent que les C-LPE dans les graphes de fusion parfaits constituent une segmentation intéressante pour initialiser les méthodes de fusion de régions.

Les algorithmes pour calculer les W-amincissements, et donc les séparations induites par LPE topologiques, ne sont pas linéaires et nécessitent le calcul d’une structure de donnée auxiliaire appelée *arbre des coupes* [78]. Dans ce chapitre nous proposons et prouvons un algorithme simple de type inondation pour le calcul des C-LPE dans les graphes de fusion parfaits. De plus, nous montrons que cet algorithme est monotone : les pixels de l’image sont traités par altitude croissante. Ces résultats sont surprenants car dans le cas d’un graphe général un tel algorithme n’existe pas [72]. L’avantage principal est de réduire à une complexité linéaire le calcul d’une LPE qui soit un W-amincissement.

Finalement, en utilisant les propriétés des C-LPE, nous déduisons que toute séparation induite par une LPE topologique dans un graphe de fusion parfait est un clivage mince. De plus, nous donnons des caractérisations des graphes de fusion parfaits reposant sur les propriétés de minceur des LPE topologiques et C-LPE.

Les preuves des propriétés énoncées dans ce chapitre peuvent être trouvées dans la référence

[90], qui est reprise dans l'Annexe B du manuscrit.

3.2 Minceur des LPE topologiques

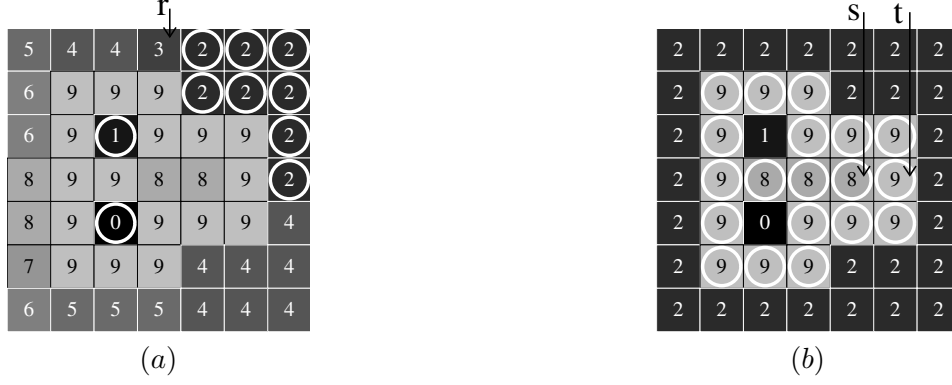


FIG. 3.1 – LPE topologique épaisse d'une image équipée de la 8-adjacence.

(a) : Une fonction F dont les minima sont cerclés de blanc ; (b) : une LPE topologique de F , la séparation induite est composée des pixels cerclés de blanc.

Les séparations induites par les algorithmes de LPE [38, 95, 41] et en particulier par ceux de LPE topologique ne sont pas toujours des clivages et peuvent parfois être épaisses même dans les graphes de fusion. Considérons par exemple les images F et H des Figure 3.1a et b et supposons qu'elles soient équipées de la 8-adjacence. Bien que la fonction H soit une LPE topologique de F et que le graphe considéré soit un graphe de fusion (Propriété 42), le pixel étiqueté s (Figure 3.1b) est intérieur pour $\overline{M(H)}$ la séparation induite par H . Donc $\overline{M(H)}$ n'est pas mince. Une telle épaisseur peut poser problème pour définir et implémenter une future étape de fusion de régions. Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un résultat (Théorème 36) qui permet de caractériser, grâce à une propriété de fusion, la classe des graphes dans lesquels tout clivage est mince. Les LPE topologiques étendent les clivages aux cas des fonctions (Théorème 17). Dans cette section nous présentons un résultat similaire au Théorème 36 pour le cas des fonctions (Théorème 49).

Afin d'atteindre cet objectif, nous commençons par introduire une définition de minceur sur les fonctions qui étend la notion ensembliste (Définition 26) grâce aux sections supérieures.

Remarque importante : Dans la suite de ce chapitre, F désigne une fonction de $\mathcal{F}(V)$.

Soit $k \in \mathbb{K}$. Nous rappelons que $F[k]$, la section supérieure de F au niveau k est l'ensemble des sommets de G dont l'altitude est supérieure ou égale à k .

Définition 48 (fonction mince) Soit $x \in V$ et $k = F(x)$. On dit que x est un point intérieur pour F si x est intérieur pour $F[k]$. L'intérieur de F , noté $\text{int}(F)$, est l'ensemble des points de $\overline{M(F)}$ qui sont intérieurs pour F . On dit que F est mince si $\text{int}(F) = \emptyset$.

En d'autres termes, un point est intérieur pour une fonction si tous ses voisins ont une altitude supérieure ou égale à sa propre altitude. Ainsi, une fonction est mince si tout point dans la

séparation qu'elle induit a au moins un voisin d'altitude strictement inférieure. Nous observons, par exemple, que la LPE topologique de la Figure 3.3c est mince alors que celle de la Figure 3.1b ne l'est pas (le point étiqueté s est intérieur).

Il découle de la définition d'une LPE topologique et du Théorème 36 que, si toutes les LPE topologiques sont minces dans G , alors G doit nécessairement être un graphe de fusion. La fonction de la Figure 3.1b démontre que, contrairement au cas des clivages, la réciproque n'est en général pas vraie. Malgré cela, comme l'établit le théorème de caractérisation ci-dessous, il existe des liens forts entre ces deux classes de graphes.

Théorème 49 (Théorème 9, Annexe B) *Toute LPE topologique dans G est mince si et seulement si pour tout clivage $P \subseteq V$, toute composante connexe A de \overline{P} est telle que le sous-graphe de G induit par A est un graphe de fusion.*

Nous remarquons que la condition ci-dessus, qui caractérise les graphes dans lesquels toute LPE topologique est mince, est un affaiblissement de la condition *iv* du Théorème 40 qui caractérise les graphes de fusion parfaits. Nous pouvons donc déduire que toute LPE topologique dans un graphe de fusion parfait est mince. En revanche, la réciproque n'est pas exacte. Il existe des graphes, comme celui de la Figure 3.2, qui ne sont pas des graphes de fusion parfaits et dans lesquels toute LPE topologique est mince.

D'une part, la notion de clivage formalise l'idée d'ensemble frontière dans un graphe (Définition 3, Chapitre 1). D'autre part, la séparation induite par une LPE topologique constitue une segmentation intéressante de l'image de départ (Chapitre 1). Il serait donc souhaitable que la séparation induite par une LPE topologique soit un clivage. Malheureusement, une telle propriété n'est pas toujours vérifiée même pour un graphe dans lequel toutes les LPE topologiques sont minces. Considérons par exemple le graphe G et la fonction F de la Figure 3.2. On peut vérifier, grâce au Théorème 49, que toute LPE topologique dans G est mince. Cependant, on peut également observer que les points cerclés en gras sont unconnectés pour $\overline{M(F)}$ la séparation induite par F . Donc, $\overline{M(F)}$ n'est pas un clivage. Observons également que le sommet noir est intérieur pour $\overline{M(F)}$ et donc que $\overline{M(F)}$ n'est pas mince dans le sens ensembliste (Définition 26). Il découle de ce contre-exemple que la notion de minceur définie dans cette section est trop faible et ne caractérise pas les LPE topologiques adaptées aux méthodes de fusion de régions. Dans les sections suivantes, nous étudions les LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits et montrons que ce genre de problèmes ne peut pas se produire

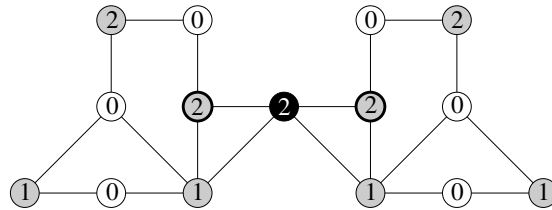


FIG. 3.2 – Graphe n'admettant que des LPE topologiques minces.

Les valeurs attribuées aux sommets définissent une LPE topologique dont les minima sont représentés en blanc. Le point noir est intérieur (au sens de la Définition 25) pour la séparation induite (sommets noirs et gris). Les sommets cerclés de gras sont unconnectés pour cette séparation.

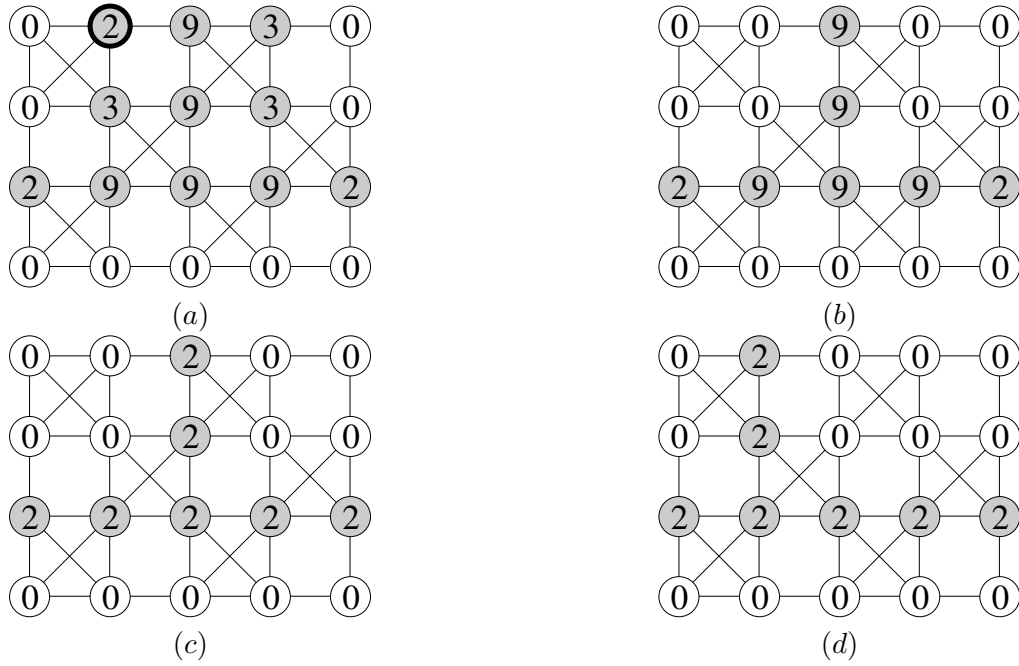


FIG. 3.3 – C-LPE dans un graphe de fusion parfait.

Les minima des fonctions sont en blanc ; (a) : le point cerclé de gras est un point M-falaise ; (b) : une C-LPE de (a) ; (c) : une LPE topologique de (a) et (b) ; (d) : une LPE topologique de (a).

3.3 C-LPE dans les graphes de fusion parfaits

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle transformation, appelée *C-LPE*. Elle procède par abaissement de valeurs et induit des séparations qui sont nécessairement des clivages. Un résultat important (Théorème 53) est que, dans un graphe de fusion parfait, toute C-LPE d'une fonction est un W-amincissement de cette fonction et donc préserve les valeurs de connexion au sens de la Définition 22. D'autre part, comme tout graphe de fusion parfait est un graphe de fusion (Propriété 35) et que tout clivage dans un graphe de fusion est nécessairement mince (Théorème 36), nous déduisons que dans les graphes de fusion parfaits toute C-LPE induit nécessairement un clivage mince. De plus, nous proposons et prouvons un algorithme linéaire pour le calcul des C-LPE dans les graphes de fusion parfaits.

Définition 50 (point M-falaise) Soit $p \in V$. On dit que p est un point falaise (pour F) si p est unconnecté pour $\overline{M(F)}$. On dit que p est un point M-falaise (pour F) si p est un point falaise d'altitude minimale (i.e., $F(p) = \min\{F(q) \mid q \in V \text{ est un point falaise pour } F\}$).

En d'autres termes, un point falaise pour F est un point de $\overline{M(F)}$ qui n'est adjacent qu'à un seul minimum de F . Un point falaise p est M-falaise pour F si aucun autre point de $\overline{M(F)}$ adjacent à un unique minimum n'a une altitude strictement inférieure à celle de p .

Dans la Figure 3.3a, les points de niveau 3 sont des points falaises et le sommet cerclé de gras est le seul point M-falaise. Dans les Figures. 3.3b,c et d, on remarque qu'il n'y a ni point M-falaise ni point falaise.

Soit $p \in V$ un point W -destructible pour F et soit $\ell \in \mathbb{Z}$. Le point p est W -destructible jusqu'à ℓ (pour F) si :

- pour tout $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell < h \leq F(p)$, p est unconnecté pour $F[h]$; et si
- p n'est pas unconnecté pour $F[\ell]$.

Lemme 51 (Lemme 11, Annexe B) *Soit $p \in V$ un point M -falaise pour F et soit $\ell \in \mathbb{K}$ l'altitude du seul minimum de F adjacent à p . Si G est un graphe de fusion parfait alors p est W -destructible jusqu'à ℓ pour F .*

Remarquons que dans un graphe qui n'est pas de fusion parfait, les points M -falaise ne sont pas nécessairement W -destructibles. En effet, on peut vérifier que le graphe de la Figure 3.2 n'est pas un graphe de fusion parfait et que tous les sommets cerclés de gras sont des points M -falaise non W -destructibles.

Le Lemme 51 nous invite à étudier la famille des W -amincissements qui procèdent par abaissement de valeurs des points M -falaise.

Soit $\ell \in \mathbb{Z}$ et $p \in V$, nous dénotons par $[F_{p,\ell}]$ la fonction de $\mathcal{F}(V)$ définie par $[F_{p,\ell}](p) = \ell$ et $[F_{p,\ell}](q) = F(q)$ pour tout $q \in V \setminus \{p\}$.

Définition 52 *Soit $H \in \mathcal{F}(V)$. On dit que H est un C -amincissement de F si :*

- i) $H = F$, ou si
 - ii) *il existe une fonction I qui est un C -amincissement de F et un point p M -falaise pour I tels que $H = [I_{p,\ell}]$, où ℓ est l'altitude du seul minimum de I adjacent à p .*
- On dit que F est une C -LPE s'il n'existe aucun point M -falaise pour F . Si H est à la fois un C -amincissement de F et une C -LPE, on dit que H est une C -LPE de F .*

Le théorème suivant est une conséquence du Lemme 51, des Définitions 50 et 52 et du Théorème 36. En bref, il établit que, dans les graphes de fusion parfaits, les séparations induites par des C -LPE constituent des segmentations intéressantes vis-à-vis des contraintes discutées dans l'introduction du présent chapitre.

Théorème 53 (Théorème 13, Annexe B) *Supposons que G soit un graphe de fusion parfait.*

Soit H une C -LPE de F . Alors, H est un W -amincissement de F . De plus, la séparation induite par H est un clivage mince.

Afin d'illustrer le précédent théorème, intéressons-nous à la Figure 3.3. La fonction H (figure b) est une C -LPE de la fonction F (figure a). On peut vérifier que H est bien un W -amincissement de F et que la séparation induite par H est bien un clivage mince. On remarque également qu'une C -LPE n'est pas une LPE topologique. Par exemple, H est une C -LPE mais comme les points d'altitude 9 sont W -destructibles, elle n'est pas une LPE topologique. Néanmoins, la propriété suivante implique que toute séparation induite par une C -LPE de F est égale à une séparation induite par une LPE topologique de F .

Propriété 54 (Propriété 14, Annexe B) *Supposons que F soit une C -LPE. Toute séparation induite par un W -amincissement de F est égale à la séparation induite par F .*

Les algorithmes de [73] pour calculer (la séparation induite par) une LPE topologique de F ne sont pas linéaires en temps de calcul et requièrent une structure de données auxiliaire appelée

arbre des coupes [78]. Nous allons montrer qu'il est possible d'atteindre, dans un graphe de fusion parfait, une meilleure complexité pour calculer une C-LPE, et donc d'après la Propriété 54 une séparation induite par une LPE topologique.

Dans une séquence de C-amincissements, les points qui sont dans un minimum à une itération donnée ne deviennent jamais des points M-falaise dans les itérations suivantes. Cette observation nous conduit à définir un algorithme (Algorithme 1) très simple pour le calcul des C-LPE.

Algorithm 1: C-LPE

Data: un graphe de fusion parfait G , une fonction $F \in \mathcal{F}(V)$
Result: F

```

1  $L := \emptyset$ ;  $K := \emptyset$ ;
2 Attribuer des étiquettes distinctes à tous les minima de  $F$  et marquer les points de  $M(F)$ 
  avec les étiquettes correspondantes ;
3 foreach  $p \in V$  do
4   if  $p \in M(F)$  then  $K := K \cup \{p\}$ ;
5   else if  $p$  est adjacent à  $M(F)$  then  $L := L \cup \{p\}$ ;  $K := K \cup \{p\}$ ;
6 while  $L \neq \emptyset$  do
7    $p :=$  un élément de  $L$  d'altitude minimale pour  $F$ ;
8    $L := L \setminus \{p\}$ ;
9   if  $p$  est adjacent à exactement un minimum de  $F$  then
10    Attribuer à  $F[p]$  l'altitude du seul minimum de  $F$  adjacent à  $p$ ;
11    Marquer  $p$  avec l'étiquette correspondante;
12    foreach  $q \in \Gamma^*(p) \cap \overline{K}$  do  $L := L \cup \{q\}$ ;  $K := K \cup \{q\}$ ;

```

A chaque itération de la boucle principale (ligne 6), tous les points adjacents à un unique minimum de la fonction F courante appartiennent à l'ensemble L . Ainsi on peut vérifier qu'à chaque itération, F est un C-amincissement (donc, d'après le Lemme 51, un W-amincissement) de la fonction d'entrée.

A l'issue de l'Algorithme 1, l'ensemble L est vide. Il n'existe donc aucun point adjacent à un unique minimum de F . Donc, la fonction F ne contient aucun point M-falaise. Il découle directement de ces remarques que, lorsque l'Algorithme 1 se termine, la fonction F obtenue est une C-LPE de la fonction d'entrée.

Dans cet algorithme, les opérations effectuées sur l'ensemble L sont l'insertion d'un élément et l'extraction d'un élément d'altitude minimale. Cet ensemble L peut donc être implémenté par une file de priorité. Dans [103], une structure de ce type permettant d'effectuer efficacement les opérations pré-citées a été proposée : insérer un élément, extraire un élément minimal ou supprimer un élément peut être réalisé, au pire, en un temps $O(\log \log m)$, m étant le nombre d'éléments de L . En fait, pour calculer une C-LPE, il est possible d'utiliser une structure de données encore plus rapide. Pour atteindre cet objectif, énonçons tout d'abord le théorème fondamental suivant. Il établit que dans une séquence de C-amincissements les points sont abaissés par ordre croissant d'altitude.

Théorème 55 (monotonie, Théorème 15, Annexe B) *Supposons que G soit un graphe de fusion parfait.*

Soit H un C -amincissement de F . Alors, tout point M -falaise pour H a une altitude supérieure ou égale à tout point M -falaise pour F .

D'après le Théorème 55, nous pouvons déduire que dans l'Algorithme 1, lorsque la fonction F est abaissée en un point p d'altitude k , tous les points insérés ultérieurement dans L ont une altitude supérieure ou égale à k . L'ensemble L peut donc être implémenté par une file de priorité monotone. M. Thorup [103] a démontré que s'il est possible de trier n éléments (voir [100]) en un temps $n.s(n)$, alors, et seulement alors, il existe une file de priorité monotone de capacité n , qui supporte les opérations d'insertion d'un élément et d'extraction d'un élément minimal en un temps amorti $s(n)$. En analyse d'image, les pixels d'une image ont généralement des valeurs qui appartiennent à un sous-ensemble restreint de \mathbb{Z} (typiquement $\mathbb{K} = [0, 255]$). Dans ce cas, il existe des algorithmes de tri linéaires [16] et donc une file de priorité monotone qui permet d'effectuer les opérations pré-citées en temps amorti constant.

Dans l'Algorithme 1, l'ensemble K permet d'éviter l'insertion multiple d'un même point dans l'ensemble L et il peut être implémenté avec un tableau de Booléen. Ainsi, la boucle principale (ligne 6) est exécutée au plus $|V|$ fois. De plus, les minima d'une fonction peuvent être extraits en temps linéaire grâce à des algorithmes simples. De ces remarques, nous déduisons donc la Propriété 56.

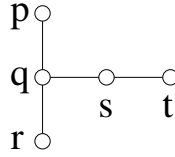
Propriété 56 (Propriété 16, Annexe B) *Si les éléments de V peuvent être triés, selon les valeurs de F , en un temps linéaire par rapport à $|V|$, alors l'Algorithme 1 s'exécute en temps linéaire par rapport $(|V| + |E|)$.*

Comme l'Algorithme 1 vérifie la propriété de monotonie discutée plus haut, il peut être classifié dans le groupe des algorithmes par inondation (voir [38, 95, 41] ou les Section 1.3.2 et 1.3.4). Dans les graphes qui ne sont pas de fusion parfaits, le Théorème 55 n'est, en général, pas vrai. Considérons, par exemple, la fonction F présentée Figure 3.1b. Le pixel d'altitude 9 marqué t , est un point M -falaise pour F (mais il n'est pas W -destructible) et donc, la fonction $H = [F_{t,2}]$ est un C -amincissement de F . Le pixel marqué s (Figure 3.1b) est le seul point M -falaise pour H mais son altitude ($H(s) = 8$) est strictement inférieure à celle de t pour F ($F(t) = 9$). Nous déduisons donc qu'aucune séquence de C -amincissements à partir de la fonction F ne vérifie le Théorème 55. En d'autres termes, dans un graphe qui n'est pas de fusion parfait, une séquence de C -amincissements n'est, en général, pas monotone. Dans la référence [72], les auteurs ont montré que dans le cas de graphes généraux, certains algorithmes par inondation – comme celui de la Section 1.3.2 – ne sont pas monotones et qu'un algorithme monotone de W -amincissement n'induit pas, en général, une séparation qui vérifie la Propriété 54.

Dans cette section, nous avons introduit les C -LPE et démontré qu'elles possèdent des propriétés intéressantes dans les graphes de fusion parfaits. On peut se demander s'il est possible d'étendre (certaines de) ces propriétés à d'autres graphes : quelle est la plus large classe des graphes qui vérifient le Lemme 51 ?

Nous dénotons par G^λ le graphe de la Figure 3.4.

Théorème 57 (Théorème 17, Annexe B) *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*
i) pour toute fonction $H \in \mathcal{F}(V)$, tout point M -falaise est W -destructible ;
ii) pour toute fonction $H \in \mathcal{F}(V)$, toute C -LPE de H est un W -amincissement de H ;
iii) le graphe G^λ n'est induit par aucun sous-ensemble de sommets de G .


 FIG. 3.4 – Le graphe G^λ utilisé dans le Théorème 57.

3.4 LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, dans un graphe de fusion parfait, une C-LPE est toujours un W-amincissement et elle induit nécessairement un clivage mince. Dans cette section, nous étendons ce résultat aux séparations induites par les LPE topologiques. Ensuite, nous définissons un type particulier de LPE topologiques qui dérive des C-LPE. Nous montrons que cette famille satisfait une propriété additionnelle intéressante liée aux chemins descendants. Finalement, nous dérivons des caractérisations des graphes de fusion parfaits reposant sur les propriétés de minceur des C-LPE et LPE topologiques.

Si F est une LPE topologique, alors aucun point de V n'est W-destructible pour F . Dans un graphe de fusion parfait, comme tout point M-falaise est W-destructible et qu'une C-LPE ne contient pas de point M-falaise, nous déduisons la propriété suivante.

Propriété 58 (Théorème 18, Annexe B) *Supposons que G soit un graphe de fusion parfait. Si F est une LPE topologique, alors F est une C-LPE. De plus, dans ce cas, la séparation induite par F est un clivage mince.*

Nous avons montré dans la section précédente qu'une C-LPE n'est pas nécessairement une LPE topologique. La réciproque de la Propriété 58 n'est donc, en général, pas vraie. Néanmoins, les C-LPE peuvent être utilisées pour définir une stratégie intéressante de calcul des LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits.

Définition 59 (C-LPE topologique) *Supposons que G soit un graphe de fusion parfait. On dit que $H \in \mathcal{F}(V)$ est une C-LPE topologique de F , s'il existe une C-LPE I de F telle que H est une LPE topologique de I .*

Si G est un graphe de fusion parfait, on remarque immédiatement qu'une C-LPE topologique de F est bien une LPE topologique de F . Au contraire, comme nous le verrons un peu plus tard, toutes les LPE topologiques ne sont pas des C-LPE topologiques. Parmi la famille des LPE topologiques de F , celles qui sont des C-LPE topologiques satisfont une propriété additionnelle (Propriété 60) qui découle du Théorème 55.

Nous rappelons qu'un chemin $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ dans V est descendant pour F si pour tout $k \in [1, \ell]$, on a $F(x_k) \leq F(x_{k-1})$.

Propriété 60 (Propriété 20, Annexe B) *Supposons que G soit un graphe de fusion parfait. Soit H une fonction de $\mathcal{F}(V)$. Si H est une C-LPE topologique de F , alors pour tout point p de $\overline{M(H)}$, il existe deux minima de F qui peuvent être atteints depuis p par un chemin descendant pour F .*

La fonction H Figure 3.3c, est une C-LPE topologique de la fonction F (Figure 3.3a). Il peut être vérifié que depuis n'importe quel point de $\overline{M(H)}$, deux minima distincts de F peuvent être atteints par un chemin descendant pour F . En revanche, la propriété n'est pas vérifiée par toutes les LPE topologiques. Analysons, par exemple, la fonction I de la Figure 3.3d qui est une LPE topologique de F . Soit p le sommet cerclé de gras Figure 3.3a. Remarquons que $p \in \overline{M(I)}$. Cependant, le seul minimum de F qui puisse être atteint depuis p par un chemin descendant pour F est celui en haut à gauche de la figure. Ainsi, la LPE topologique I de F , qui n'est pas une C-LPE topologique de F , ne vérifie pas la Propriété 60.

A partir des propriétés énoncées dans ce chapitre, nous caractérisons les graphes de fusion parfaits par des propriétés de minceur des C-LPE et LPE topologiques.

Soient $H \in \mathcal{F}(V)$, $p \in E$ et soit $k = H(p)$. Si p est F-simple pour $H[k]$, *i.e.*, p est adjacent à exactement deux composantes de $H[k]$, on dit que p est *F-simple pour H* .

Propriété 61 (Propriété 21, Annexe B) *Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) G est un graphe de fusion parfait ;
- ii) pour toute C-LPE $H \in \mathcal{F}(V)$, tout point de $\overline{M(H)}$ est F-simple pour $\overline{M(H)}$;
- iii) pour toute LPE topologique $H \in \mathcal{F}(V)$, tout point de $\overline{M(H)}$ est F-simple pour $\overline{M(H)}$;
- iv) pour toute LPE topologique $H \in \mathcal{F}(V)$, tout point de $\overline{M(H)}$ est F-simple pour H .

3.5 Perspectives : schémas hiérarchiques dans les grilles de fusion parfaites

Que ce soit en 2D avec les 4- et 8-adjacences ou en 3D avec les 6- et 26-adjacences, les contre-exemples de ce chapitre et du précédent montrent qu'il existe des LPE topologiques qui induisent des séparations épaisses. Au contraire, nous avons démontré que dans les graphes de fusion parfaits, les séparations induites par LPE topologique sont toujours des clivages minces. Dans ces graphes, les procédures de fusion de régions peuvent être définies rigoureusement et sont facilement implémentables. Le cadre des graphes de fusion parfaits est donc adapté aux méthodes de fusion de régions reposant sur la LPE topologique. De plus, nous avons proposé un algorithme d'inondation monotone et linéaire pour le calcul des séparations induites par LPE topologique dans les graphes de fusion parfaits alors qu'un tel algorithme n'existe pas en général.

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la famille des grilles de fusion parfaites sur \mathbb{Z}^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Tout élément de cette famille est un graphe de fusion parfait. Nous avons montré que n'importe laquelle de ces grilles est "entre" la relation d'adjacence directe (qui généralise la 4-adjacence à \mathbb{Z}^n) et la relation d'adjacence indirecte (qui généralise la 8-adjacence à \mathbb{Z}^n). En analyse d'image, les grilles de fusion parfaites constituent donc une alternative intéressante aux grilles usuelles pour les méthodes de fusion de régions reposant sur la LPE. La Figure 3.5 illustre un tel schéma.

Nous avons montré dans le Chapitre 2 que les graphes d'arêtes (Définition 27) sont des graphes de fusion parfaits. Ainsi, les définitions, propriétés et algorithme présentés dans ce chapitre pour les graphes de fusion parfaits s'appliquent également aux graphes d'arêtes. Ces derniers peuvent s'avérer extrêmement intéressants pour bâtir des procédures de segmentation d'image. Le chapitre suivant se propose d'explorer en profondeur les propriétés des LPE dans ce type de graphes.

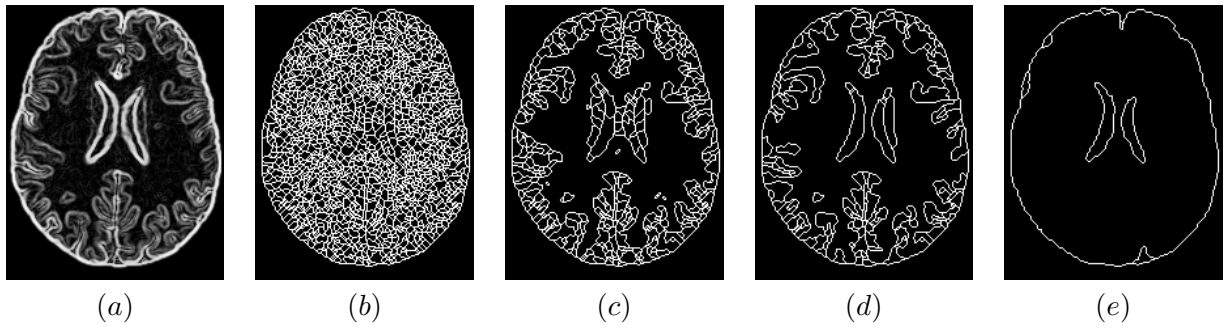


FIG. 3.5 – Fusion de régions reposant sur la LPE dans les grilles de fusion parfaites. (b), La séparation induite par une C-LPE de (a) ; et (c, d, e), différentes étapes d’une procédure de fusion de régions partant de (b).

Chapitre 4

Lignes de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées

4.1 Introduction

Dans les différentes approches de la LPE étudiées dans les Chapitres 1 et 3, une image en niveaux de gris est considérée comme un graphe dont les sommets sont valués. Parmi celles-ci, l’une des plus populaires consiste à simuler une inondation [95, 38, 41] de l’image – perçue comme un relief topographique – à partir de sources placées dans les minima régionaux. Dans ce cas la LPE est constituée de “digues” virtuelles érigées aux points où des eaux provenues de différents minima se mélangeraient. Une autre approche, la LPE topologique (Section 1.3.5, Chapitre 1 et [104, 71, 73]), permet de définir rigoureusement la notion de LPE sur les sommets d’un graphe et de prouver des propriétés qui nous semblent fondamentales mais ne sont pas vérifiées par la plupart des autres approches [72]. Cette notion repose sur une transformation qui abaisse les valeurs de l’image tout en préservant certaines propriétés topologiques (le nombre des composantes connexes de chaque section inférieure). Dans ce cas, la séparation entre les différents bassins d’attraction est constituée de l’ensemble des points qui n’appartiennent à aucun minimum de la fonction transformée.

Dans ce chapitre (voir également [91, 116, 19]), nous étudions un cadre différent : nous considérons un graphe dont les arêtes sont pondérées par une fonction de coût. Les références [99, 68, 105] présentent quelques transformations qui présentent un intérêt pour l’analyse d’images et peuvent être effectuées dans de tels graphes.

Dans ce cadre, nous définissons une nouvelle notion de LPE, appelée *coupure par LPE*, et obtenons un ensemble de propriétés remarquables. Les coupures par LPE sont définies en suivant l’idée intuitive de gouttes d’eau s’écoulant sur une surface topographique.

Notre première contribution établit la consistance de ces LPE. En particulier, nous démontrons (Théorème 66) qu’elles peuvent être définies de manières équivalentes par leurs bassins d’attraction (à travers une propriété de plus grande pente) ou par les “lignes” qui séparent ces bassins d’attraction (à travers le *principe de la goutte d’eau*). A notre connaissance (voir Tableau. 1.1, Chapitre 1), notre définition est la première à satisfaire une telle propriété.

Notre deuxième contribution établit l’optimalité des coupures par LPE. F. Meyer a montré,

dans la référence [99], les liens entre forêts de poids minimum et algorithmes d'inondation depuis des sources quelconques. Dans ce chapitre, nous étendons le problème des forêts de poids minimum et montrons l'équivalence entre coupures par LPE et coupures induites par des forêts de poids minimum relatives aux minima d'une fonction.

Notre troisième contribution consiste en un nouveau paradigme d'amincissement pour calculer les coupures par LPE en temps linéaire. Plus précisément, nous proposons une nouvelle transformation appelée *amincissement par bord* qui abaisse, jusqu'à idempotence, la valeur des arêtes qui satisfont une propriété très simple pouvant être testée localement. Les minima de la fonction transformée constituent une forêt de poids minimum relative aux minima de la fonction d'origine. Ils induisent donc une coupure par LPE. De plus, nous montrons que toute forêt de poids minimum relative aux minima de la fonction d'origine peut être obtenue par cette transformation. Nous discutons la possibilité de bâtir des algorithmes parallèles reposant sur cette transformation et proposons un algorithme séquentiel qui s'exécute en temps linéaire.

Notre quatrième contribution est un second algorithme linéaire qui, au contraire des autres algorithmes, ne requiert pas l'extraction des minima dans une étape préliminaire. Contrairement aux algorithmes publiés précédemment, les deux qui sont proposés dans ce chapitre ne nécessitent ni procédure de tri, ni file de priorité, ni structure pour maintenir une union d'ensembles disjoints. Pour cette raison, ils s'exécutent en temps linéaire quel que soit l'intervalle des valeurs prises par la fonction d'origine. A notre connaissance, il s'agit des premiers algorithmes de LPE vérifiant cette propriété.

Notre cinquième contribution est une comparaison mathématique entre les coupures par LPE et deux autres paradigmes de segmentation d'image. Nous étudions tout d'abord les liens et différences avec les forêts de plus courts chemins (le socle théorique de la Transformée Image Forêt, IFT [68] et de la segmentation d'image par connexité floue [49, 61]). Nous montrons que toute forêt de poids minimum est une forêt de plus courts chemins et que la réciproque n'est, en général, pas vraie. Ensuite, nous étudions la LPE topologique et montrons que tout amincissement par bord est un W-amincissement (*i.e.*, la transformation qui permet d'obtenir les LPE topologiques). Pour obtenir ce résultat, nous montrons que le cadre des graphes à arêtes valuées est un cas particulier de celui des graphes de fusion parfaits (Chapitre 2). Une conséquence majeure est donc que les coupures par LPE héritent des propriétés mathématiques des LPE topologiques dans les graphes de fusion parfaits (Chapitre 3).

Nous terminons ce chapitre par quelques résultats expérimentaux. En premier lieu, nous présentons deux illustrations qui suggèrent que l'approche proposée permet, dans certains cas, de localiser avec une précision accrue les contours d'images digitales réelles. Enfin, nous comparons, sur des images de taille variable, les temps d'exécution de différents algorithmes de LPE et concluons que les algorithmes proposés dans ce chapitre sont les plus rapides en pratique.

Les preuves des propriétés énoncées dans ce chapitre peuvent être trouvées dans la référence [91], qui est reprise dans l'Annexe C du manuscrit.

4.2 Graphes à arêtes valuées

Dans ce chapitre, nous étudions les LPE des fonctions qui valuent (pondèrent) les arêtes, et non les sommets, d'un graphe. Nous commençons par quelques rappels et définitions de bases pour appréhender ce genre de graphes.

Soit C un sous-ensemble de E , nous rappelons que \overline{C} désigne le complémentaire de C dans E , i.e., $\overline{C} = E \setminus C$. Le *graphe induit par C* est le graphe dont l'ensemble d'arêtes est C et dont l'ensemble de sommets est composé de tous les points qui appartiennent à une arête de C , i.e., $(\{x \in V \mid \exists u \in C, x \in u\}, C)$. Par la suite, lorsque cela n'induit pas en confusion, le graphe induit par C est également noté C .

Remarque importante : Nous disons que $\mathcal{F}(E)$ est la famille de toutes les fonctions qui *valuent* (pondèrent) les arêtes de G . Dans la suite de ce chapitre F désigne une fonction qui pondère les arêtes de G et, pour toute arête u dans E , $F(u)$ est appelée l'*altitude* (pour F) de u . Dans les applications à la segmentation d'image, nous supposons que le niveau d'une arête u contenant deux pixels x et y , représente la dissimilarité entre les pixels x et y (e.g., $F(u)$ est la différence absolue d'intensité entre x et y). Ainsi, nous supposons que les contours saillants sont localisés sur les arêtes les plus élevées.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, notons que $F[k]$, la section (supérieure) de F au niveau k , est l'ensemble des arêtes de G dont le niveau est supérieur ou égal à k .

Nous appelons *minimum (régional) de F (au niveau k)* toute composante X du graphe induit par $\overline{F}[k+1]$ qui vérifie $\overline{F}[k] \cap E(X) = \emptyset$. Notons qu'un minimum régional dans un graphe à arêtes valuées est un sous-graphe (et non un sous-ensemble des sommets) de G .

Nous désignons par $M(F)$ le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont, respectivement, l'union des ensembles de sommets et ensembles d'arêtes de tous les minima de F .

4.3 Lignes de partage des eaux

L'idée intuitive qui sous tend la notion de LPE provient de la topographie : une goutte d'eau tombant sur un relief topographique s'écoule selon un chemin descendant pour atteindre finalement un minimum du relief. La LPE peut être vue comme l'ensemble des lignes qui séparent les domaines d'attraction des gouttes d'eau.

4.3.1 Extensions et coupures dans les graphes

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la notion d'extension (Définition 13) joue un rôle primordial pour définir une LPE (Définition 14). Nous commençons par adapter cette notion aux graphes, puis nous dérivons une définition de *coupure* dans un graphe qui est analogue à celle de clivage pour les ensembles de sommets (Définition 3).

Définition 62 (extension dans un graphe) Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G . On dit que Y est une *extension* de X (dans G) si $X \subseteq Y$ et si toute composante de Y contient exactement une composante de X .

Les graphes (dessinés en gras) Figure 4.1b, c et d sont trois extensions de celui Figure 4.1a.

La notion d'extension est très générale. De nombreux algorithmes de segmentation étendent dans un graphe des composantes dites "graines" : ils produisent une extension des graines. La

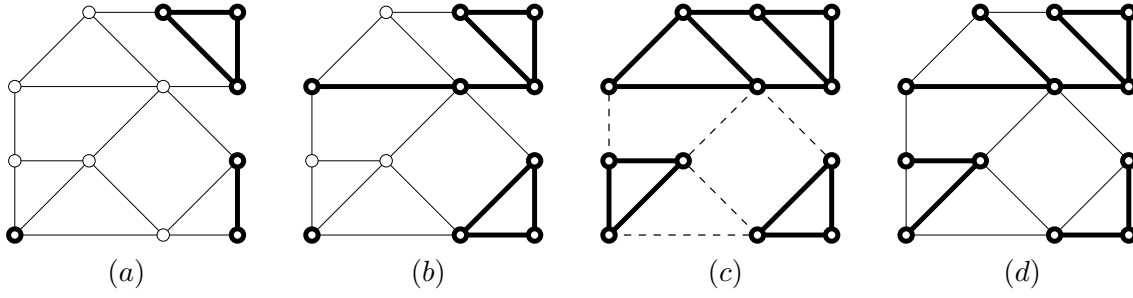


FIG. 4.1 – Extension dans un graphe.

Les ensembles de sommets et d'arêtes en gras sont : (a), un sous-graphe X ; (b), une extension de X ; (c), une extension Y de X qui est maximale ; et (d), forêt couvrante relative à X .

L'ensemble des arêtes en traits pointillés Figure (c) est une coupure relative à X .

plupart d'entre eux s'arrêtent lorsqu'ils ont atteint une extension qui couvre tous les sommets du graphe. La séparation ainsi produite est appelée coupure.

Définition 63 (coupure) Soient $X \subseteq G$ et $C \subseteq E$. On dit que C est une coupure (de graphe) relative à X si \overline{C} est une extension de X et si C est minimal pour cette propriété, i.e., $T \subseteq C$ et \overline{T} est une extension de X , impliquent $T = C$.

L'ensemble C des arêtes en pointillés Figure 4.1c est une coupure relative à X (Figure 4.1a). On peut vérifier que \overline{C} (en gras Figure 4.1c) est une extension de X et que C est minimal pour cette propriété.

Si X est un sous-graphe de G et C une coupure relative à X , il peut être facilement démontré que \overline{C} est une extension maximale de X .

La notion de coupure qui est étudiée depuis de nombreuses années [14, 13], est souvent définie au moyen de partitions. Dans ce cas, un ensemble d'arêtes $C \subseteq E$ est appelé coupure s'il existe une partition Ψ de V telle que C est l'ensemble des arêtes dont les extrémités sont dans deux ensembles distincts de la partition Ψ . Si chaque ensemble de la partition est connexe et contient les sommets d'une unique composante d'un sous-graphe de G , alors C est une coupure relative à ce sous-graphe. Il peut être facilement vérifié que cette définition est équivalente à la Définition 63. Un des résultats les plus fondamentaux en optimisation combinatoire traite des coupures dans les graphes. Étant donnés deux sommets distincts d'un graphe à arêtes valuées (appelés source et puits), trouver une coupure de coût minimal qui sépare ces deux sommets est équivalent à trouver un flot maximum [2]. Il existe des algorithmes polynomiaux pour extraire une telle coupure (*min-cut*, en anglais). A contrario, déterminer une coupure minimale parmi toutes les coupures relatives à un sous-graphe non réduit à deux sommets isolés est NP-difficile [97]. Dans les sections suivantes, nous introduisons les coupures par LPE et montrons qu'elles satisfont aussi une propriété d'optimalité. Un avantage majeur est qu'elles peuvent être calculées en temps linéaire.

Dans un papier présenté à ISMM 2007, C. Allène *et al* [117] ont identifié une classe de fonctions de valuation pour lesquelles toute coupure minimale est une LPE au sens de la définition introduite dans la section suivante. Ce résultat établit pour la première fois un lien entre ces deux paradigmes populaires en segmentation d'image (voir [62] pour des applications de coupures minimales à l'analyse d'image).

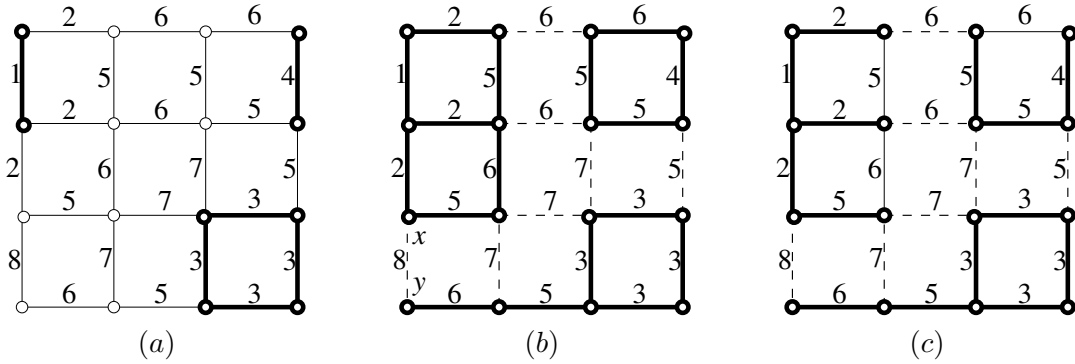


FIG. 4.2 – LPE dans un graphe à arêtes valuées.

Un graphe G et une fonction de pondération F . (a), Les minima de F sont dessinés en gras ; (b), l'ensemble des arêtes en traits pointillés est une LPE C de F ; le graphe induit par \overline{C} est dessiné en gras ; et (c), une FPM relative à $M(F)$ est dessinée en gras.

4.3.2 LPE par le principe de la goutte d'eau

Nous introduisons les coupures par LPE d'un graphe à arêtes valuées. Dans ce but, nous formalisons le principe de la goutte d'eau. Intuitivement, les bassins d'attraction constituent une extension des minima et sont séparés par des “lignes” depuis lesquelles une goutte d'eau peut s'écouler vers deux minima distincts.

Soit $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ un chemin dans G . Le chemin π est *descendant* (pour F) si, pour tout $i \in [1, \ell - 1]$, $F(\{x_{i-1}, x_i\}) \geq F(\{x_i, x_{i+1}\})$.

Définition 64 (coupure par LPE) Soit $C \subseteq E$. On dit que C satisfait le principe de la goutte d'eau (pour F) si \overline{C} est une extension de $M(F)$ et si pour tout $u = \{x_0, y_0\} \in C$, il existe, dans \overline{C} , deux chemins $\pi_1 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ et $\pi_2 = \langle y_0, \dots, y_m \rangle$ qui sont descendants pour F et satisfont les propriétés suivantes :

- x_n et y_m sont des sommets de deux minima distincts de F ; et
- $F(u) \geq F(\{x_0, x_1\})$ (resp. $F(u) \geq F(\{y_0, y_1\})$), si π_1 (resp. π_2) n'est pas trivial.

Si C satisfait le principe de la goutte d'eau, on dit que C est une coupure par LPE, ou simplement une LPE, de F .

Illustrons cette définition sur la fonction F de la Figure 4.2. La fonction F contient trois minima représentés en gras Figure 4.2a. Appelons C l'ensemble des arêtes en traits pointillés Figure 4.2b et $u = \{x, y\}$ la seule arête de C d'altitude 8. On observe que \overline{C} (en gras Figure 4.2b) est une extension de $M(F)$. On remarque également qu'il existe π_1 (resp. π_2) un chemin descendant, dans \overline{C} , depuis x (resp. y) vers le minimum d'altitude 1 (resp. 3). L'altitude de la première arête de π_1 (resp. π_2) est inférieure à l'altitude (8) de u . Cette propriété peut être vérifiée pour toutes les arêtes de C et donc, C est une LPE de F .

On peut facilement montrer que toute LPE de F est une coupure relative aux minima de F (voir par exemple Figure 4.2b). Par contre, comme la notion de LPE est définie par des conditions relatives à l'altitude des arêtes alors que celle de coupure repose uniquement sur la structure du graphe, on constate que la réciproque n'est en général pas vraie.

4.3.3 Bassins d'attraction par une propriété de plus grande pente

Une alternative populaire à la Définition 64 consiste à définir une LPE par ses bassins d'attraction et les chemins de plus grande pente (voir les Sections 1.3.3 et 1.3.4 du Chapitre 1 ou les références [42, 43, 45, 60]). Dans un graphe à sommets valués ces définitions posent certains problèmes qui ont été évoqués précédemment (Tableau. 1.1, Chapitre 1).

Dans le cadre des graphes à arêtes valuées, nous définissons un *bassin d'attraction* comme une composante connexe du complémentaire d'une LPE. Le théorème suivant (Théorème 66) montre qu'une LPE peut être définie de manière équivalente par une propriété de ses bassins d'attraction ou par le principe de la goutte d'eau sur la coupure qui les sépare.

Introduisons d'abord quelques définitions concernant les chemins de plus grande pente dans les graphes à arêtes valuées.

Remarque importante : *A partir de maintenant, nous dénotons également par F l'application de V dans \mathbb{Z} qui associe à tout point $x \in V$, l'altitude minimale d'une arête qui contient x , i.e., $F(x) = \min\{F(u) \mid u \in E, x \in u\}$; $F(x)$ est l'altitude de x .*

Soit $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ un chemin dans G . Le chemin π est un *chemin de plus grande pente* pour F si, pour tout $i \in [1, \ell]$, $F(\{x_{i-1}, x_i\}) = F(x_{i-1})$.

Définition 65 (coupure par bassins) *Soit $C \subseteq E$ une coupure relative à $M(F)$. On dit que C est une coupure par bassins (d'attraction) de F si, pour tout sommet x de V , il existe, dans le graphe induit par \overline{C} , un chemin de x à $M(F)$ qui est de plus grande pente pour F .*

Théorème 66 (consistance, Théorème 6, Annexe C) *Soit $C \subseteq E$. L'ensemble C est une coupure par bassins de F si et seulement si C est une coupure par LPE de F .*

Le théorème précédent établit la consistance des coupures par LPE : elles peuvent être définies de manière équivalente par une propriété de plus grande pente sur les bassins d'attraction (régions) ou par le principe de la goutte d'eau sur la coupure (bord) qui les sépare. A notre connaissance (voir Section 1.3, Chapitre 1), il n'existe pas de définition de LPE sur les sommets d'un graphe vérifiant une telle propriété. Ce théorème de consistance montre donc que les graphes à arêtes valuées constituent un cadre adapté pour l'étude des LPE discrètes.

4.4 Forêts couvrantes de poids minimum

Dans cette section, nous établissons l'optimalité des LPE. Pour cela, nous introduisons la notion de forêt couvrante de poids minimum relative à un sous-graphe de G . Nous allons voir que chacune de ces forêts induit une unique coupure. Le résultat principal de cette section (Théorème 69) établit qu'une coupure est induite par une forêt couvrante de poids minimum relative aux minima d'une fonction si et seulement si c'est une coupure par LPE de F .

Soient X et Y deux sous-graphes non-vides de G . On dit que Y est une *forêt relative à X* si :

- i) Y est une extension de X ; et
- ii) pour toute extension $Z \subseteq Y$ de X , on a $Z = Y$ si $V(Z) = V(Y)$.

On dit que Y est une *forêt couvrante relative* à X si Y est une forêt relative à X et si $V(Y) = V$.

Le graphe représenté en gras Figure 4.1d est une forêt couvrante relative au graphe en gras Figure 4.1a.

Soit $X \subseteq G$, on peut remarquer qu'un sous-graphe Y de G est une forêt relative à X si et seulement si Y est une extension de X et si chaque *cycle* (i.e., un chemin élémentaire dont les premier et dernier sommets sont adjacents) dans Y est également un cycle dans X .

Ainsi, grâce aux forêts relatives, les notions usuelles d'arbre et forêt peuvent être définies de la manière suivante. Soit $X \subseteq G$. Le graphe X est un *arbre* (resp. un *arbre couvrant*) si X est une forêt (resp. forêt couvrante) relative au sous-graphe $(\{x\}, \emptyset)$, x étant un sommet quelconque de X . Le graphe X est une *forêt* (resp. une *forêt couvrante*) si X est une forêt (resp. une forêt couvrante) relative à (S, \emptyset) , S étant un sous-ensemble de $V(X)$.

Soit X un sous-graphe de G , le *poids* de X (pour F), noté $F(X)$ est la somme des poids des arêtes de X , i.e. $F(X) = \sum_{u \in E(X)} F(u)$.

Définition 67 (forêt couvrante de poids minimum (FPM) relative) Soient X et Y deux sous-graphes de G . On dit que Y est une forêt couvrante de poids minimum (FPM) relative à X (pour F) si Y est une forêt couvrante relative à X et si le poids de Y est inférieur ou égal au poids de tout autre forêt couvrante relative à X . Dans ce cas, on dit aussi que Y est une FPM relative.

Considérons le graphe G de la Figure 4.3 et le sous-graphe X représenté en gras Figure 4.3a. Les graphes Y et Z (sommets et arêtes en gras des Figures. 4.3b et c) sont deux FPM relatives à X .

Soit X un sous-graphe de G et soit Y une forêt couvrante relative à X . On peut voir qu'il existe une unique coupure C relative à Y et que cette coupure est aussi une coupure relative à X . On dit que cette unique coupure est la *coupure induite par Y* .

Définition 68 (coupure par FPM) Soient X et Y deux sous-graphes de G . Si Y est une FPM relative à X , on dit que l'unique coupure induite par X est une coupure par FPM relative à X .

Nous avons maintenant les outils mathématiques nécessaires pour présenter le résultat principal de cette section qui établit l'optimalité des coupures par LPE.

Théorème 69 (optimalité, Théorème 10, Annexe C) Soit $C \subseteq E$. L'ensemble C est une coupure par FPM relative à $M(F)$ si et seulement si C est une coupure par LPE de F .

Pour illustrer ce théorème, on peut vérifier que la coupure par LPE de la Figure 4.2b est bien une coupure par FPM relative aux minima de la fonction (Figure 4.2c).

Le problème de recherche d'un arbre de poids minimum est l'un des plus anciens et typiques en optimisation combinatoire (voir [16]). De plus, il est utilisé depuis longtemps à des fins d'analyse d'images [28]. En étendant la construction proposée initialement par F. Meyer dans l'article [95], on peut montrer [91] que les problèmes d'extractions d'un arbre de poids minimum et d'une FPM relative sont équivalents. Une conséquence directe est que tout algorithme d'arbre de poids minimum peut être employé pour extraire une FPM relative. Dans la littérature, il existe

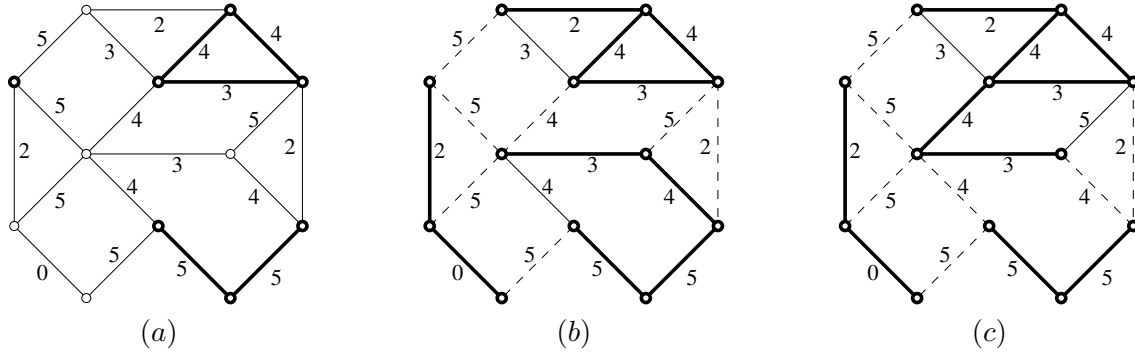


FIG. 4.3 – Forêts couvrantes de poids minimum relatives.

Un graphe G et une fonction F . Les sommets et arêtes en gras représentent : (a), X un sous-graphe de G ; (b) et (c), deux FPM relatives à X ; les coupures qu'elles induisent sont représentées en pointillé.

de nombreux algorithmes (voir une synthèse de l'état de l'art dans [16] et [34]) pour résoudre ce problème. Dans un papier récent, B. Chazelle a proposé un algorithme quasi-linéaire (au sens de la structure d'union d'ensembles disjoints de Tarjan [30]). Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir qu'une meilleure complexité peut être atteinte pour calculer les FPM relatives aux minima de F et donc les LPE.

4.5 Amincissements optimaux

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, une FPM relative à un sous-graphe de G peut être calculée par n'importe quel algorithme d'arbre de poids minimum. La meilleure complexité pour résoudre ce problème est atteinte par l'algorithme quasi-linéaire de Chazelle [56]. Dans cette section, nous introduisons un nouveau paradigme pour le calcul des FPM relatives aux minima d'une fonction et obtenons un algorithme linéaire. Pour cela, nous définissons une nouvelle transformation d'amincissement. Elle abaisse itérativement la valeur des arêtes qui satisfont une propriété simple que l'on peut tester localement. Nous montrons que les minima de la fonction transformée constituent une FPM relative aux minima de la fonction d'origine. Plus remarquablement, toute FPM relative aux minima d'une fonction peut être obtenue par cette transformation. Nous discutons la possibilité d'algorithmes parallèles reposant sur cette transformation et donnons une stratégie qui aboutit à un algorithme linéaire.

4.5.1 Amincissement par bord et LPE

Nous introduisons une classification des arêtes d'un graphe pondéré reposant exclusivement sur des propriétés locales, *i.e.*, des propriétés qui ne dépendent que des arêtes adjacentes. Cette classification est ensuite utilisée pour définir un processus d'abaissement (Définition 71) qui permet l'extraction des LPE d'une fonction.

Nous rappelons que, si x est un sommet de G , $F(x)$ est l'altitude minimale d'une arête qui contient x .

Définition 70 (classification locale) Soit $u = \{x, y\} \in E$.

On dit que u est localement séparante (pour F) si $F(u) > \max(F(x), F(y))$.

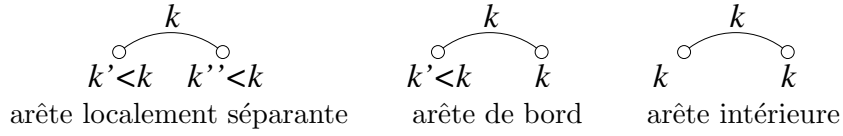


FIG. 4.4 – Configurations locales dans un graphe à arêtes valuées.

On dit que u est une arête de bord (pour F) si $F(u) = \max(F(x), F(y))$ et $F(u) > \min(F(x), F(y))$.
 On dit que u est une arête intérieure (pour F) si $F(x) = F(y) = F(u)$.

La Figure 4.4 illustre les définitions ci-dessus. Dans la Figure 4.5a, $\{j, n\}$, $\{a, e\}$ et $\{b, c\}$ sont des arêtes de bord ; $\{i, m\}$ et $\{k, l\}$ sont des arêtes intérieures et $\{h, l\}$ et $\{i, j\}$ des arêtes localement séparantes. Notons que toute arête de G correspond exactement à l'un des types présentés dans la Définition 70.

Soit $u \in E$. L'abaissement de F en u est l'application $F' \in \mathcal{F}(E)$ telle que :

- $F'(u) = \min\{F(x) \mid x \in u\}$; et
- $F'(v) = F(v)$ pour toute arête $v \in E \setminus \{u\}$.

Définition 71 (amincissement par bord) Soit $H \in \mathcal{F}(E)$. On dit que H est un amincissement par bord de F si :

- i) $H = F$; ou si
- ii) il existe $I \in \mathcal{F}(E)$ un amincissement par bord de F tel que H est l'abaissement de I en une arête de bord pour I .

S'il n'existe aucune arête de bord pour H , on dit que H est un noyau par bord. Si H est un amincissement par bord de F et que c'est un noyau par bord, on dit que H est un noyau par bord de F .

Définition 72 (coupure par bord) Soit $H \in \mathcal{F}(E)$. Si H est un noyau par bord de F , toute coupure relative à $M(H)$ est appelée coupure par bord de F .

Afin d'illustrer les définitions précédentes, nous supposons que F (resp. H , I) est la fonction de la Figure 4.5a (resp. b,c). Les fonctions H et I sont des amincissements par bord de F . La fonction I est un noyau par bord de F et H . La fonction de la Figure 4.5d est un autre noyau par bord de F qui n'est pas un noyau par bord de H . Dans les Figures. 4.5c et d, les coupures par bord sont représentées en pointillé. Nous pouvons remarquer que les minima des deux noyaux par bord forment des forêts relatives à $M(F)$, et que toutes les arêtes n'appartenant pas aux graphes dessinés en gras sont localement séparantes.

En fait, dans la sous-section suivante, nous verrons qu'il y a équivalence entre minima d'un noyau par bord de F et FPM relative à $M(F)$ et donc équivalence entre coupure par bord et par LPE. Ainsi les amincissements par bord constituent une nouvelle approche pour le calcul des LPE. Cette approche est particulièrement intéressante car elle repose uniquement sur des conditions locales et permet d'obtenir un résultat globalement optimal (Théorème 69). De plus on peut voir que cette garantie d'optimalité est indépendante de l'ordre d'abaissement des arêtes de bords.

Ce genre d'opérations indépendantes de l'ordre peut être efficacement exploité par des systèmes à architecture dédiée. Par exemple, pour le calcul des coupures par bord, des stratégies

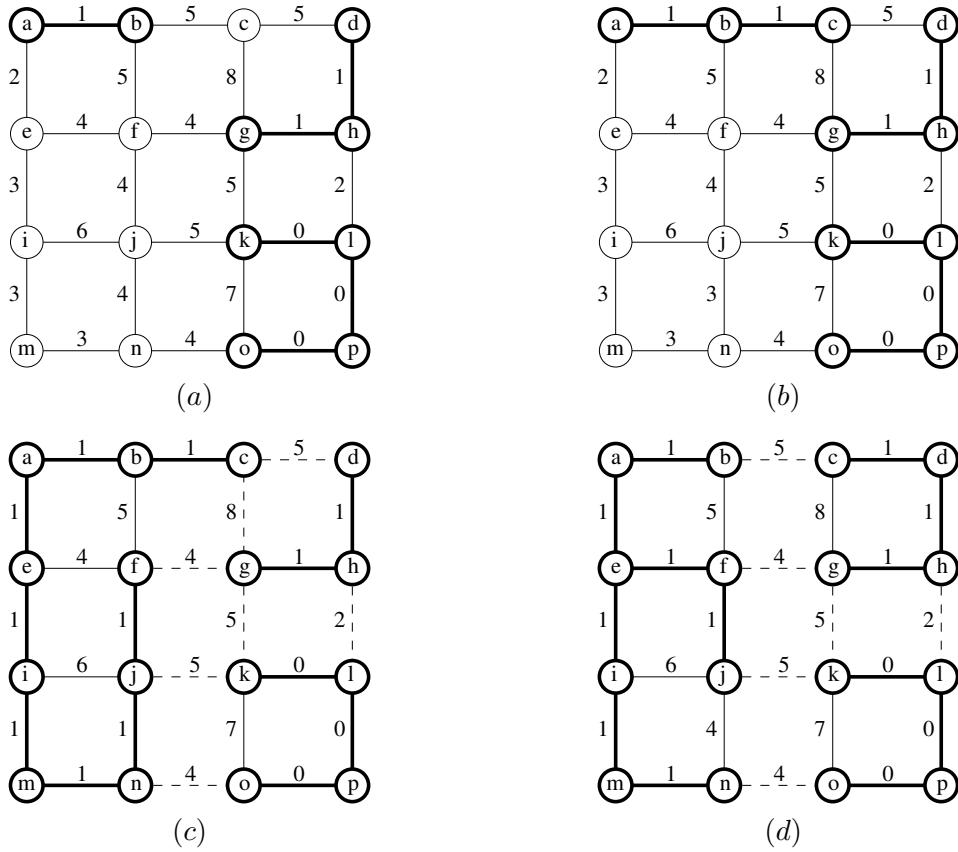


FIG. 4.5 – Amincissements et noyaux par bord.

Un graphe et quelques fonctions associées. Les arêtes et sommets en gras sont les minima des fonctions correspondantes; (b), un amincissement par bord de (a); (c), un noyau par bord de (a) et (b); et (d), un autre noyau par bord de (a). Dans les sous-figures (c) et (d), les coupures par bord sont représentées par des arêtes en pointillé.

par parcours d'arêtes dans l'ordre machine (*raster-scanning order*, en anglais) peuvent être facilement dérivées. Il a été montré que ce genre de stratégies peut être très rapide sur des architectures adaptées [101].

Comme mentionné dans l'introduction de cette sous-section, la propriété d'arête de bord peut être testée localement. Ainsi, une fonction obtenue en abaissant, en parallèle, un ensemble d'arêtes de bord *indépendantes* (i.e., mutuellement disjointes) est nécessairement un amincissement par bord. Cette propriété offre différentes possibilités d'algorithmes parallèles pour extraire les LPE. En particulier, des algorithmes efficaces peuvent être dérivés pour les architectures par matrice de processeurs (*array processor*, en anglais).

4.5.2 Algorithme linéaire de coupure par M-bord

Sur un ordinateur séquentiel, un algorithme naïf pour calculer un noyau par bord pourrait être le suivant :

1. pour toute arête $u = \{x, y\}$ de G , choisie selon un ordre arbitraire, examiner les valeurs $F(u)$, $F(x)$ et $F(y)$ et si u est une arête de bord, abaisser la valeur de u jusqu'au minimum des altitudes de x et y (coût pour tester toutes les arêtes de G : $O(|E|)$) ;
2. répéter l'étape 1. jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arête de bord pour F .

Considérons le graphe G dont l'ensemble de sommets est $\{0, \dots, n\}$ et dont l'ensemble d'arêtes est composé des paires $u_i = \{i, i+1\}$, $i \in [0, n-1]$. Posons $F(u_i) = n-i$, pour tout $i \in [0, n-1]$. Sur ce graphe, si les arêtes sont traitées par ordre croissant d'indices, l'étape 1. sera répétée exactement $|E|$ fois. Au pire cas, la complexité de cet algorithme sera donc, au moins, $O(|E|^2)$. Afin de réduire cette complexité, nous introduisons un second processus d'abaissement dans lequel chaque arête est abaissée au plus une fois. Cette transformation est un cas particulier d'amincissement par bord qui, lorsqu'elle est itérée jusqu'à stabilité, produit également un noyau par bord de la fonction d'origine. Grâce à cette seconde stratégie d'abaissement, nous dérivons un algorithme linéaire pour le calcul des noyaux par bord et donc pour celui des LPE.

Nous pouvons remarquer qu'une arête qui appartient à un minimum, lors d'une itération donnée d'une séquence d'amincissements par bord, ne devient jamais une arête de bord lors des itérations suivantes. Abaisser d'abord les arêtes adjacentes aux minima semblent donc être une stratégie prometteuse.

Définition 73 (arête M-bord) On dit qu'une arête u de E est une arête M-bord (pour F), si u est une arête de bord pour F et si exactement un des sommets de u est un sommet de $M(F)$.

Dans la Figure 4.5a, $\{c, d\}$ est une arête M-bord alors que $\{j, n\}$ ne l'est pas.

Définition 74 (coupure par M-bord) Soit $H \in \mathcal{F}(E)$. On dit que H est un amincissement par M-bord de F si :

- i) $H = F$; ou si
- ii) il existe $I \in \mathcal{F}(E)$ un amincissement par M-bord de F tel que H est l'abaissement de I en une arête M-bord pour I .

S'il n'existe pas d'arête M-bord pour H , nous disons que H est un noyau par M-bord. Si H est un amincissement par M-bord de F et si c'est un noyau par M-bord, nous disons que H est un noyau par M-bord de F .

Si H est un noyau par M-bord de F , toute coupure relative à $M(H)$ est appelée coupure par M-bord de F .

Observons, par exemple Figure 4.5a et b, que lorsqu’une fonction est abaissée en une arête M-bord, l’un de ces minima “croît d’un sommet”. Les algorithmes par inondation (voir [41, 95, 99], ou Section 1.3, et également Chapitre 3) fonctionnent également par “croissance de régions”. Intuitivement, dans le cas d’un graphe à sommets valués, ils peuvent être décrits de la manière suivante : (i), marquer les minima avec des étiquettes distinctes ; (ii), marquer le plus bas point adjacent à une unique étiquette avec cette étiquette ; et (iii), répéter l’étape (ii) jusqu’à ce qu’il n’y ait plus de point adjacent à une unique étiquette. En fait, les amincissements par M-bord – qui sont eux-même un cas particulier d’amincissement par bord – généralisent les algorithmes par inondation.

Soit X un sous-graphe de G et u une arête de G . On rappelle que u est une arête sortante de X si $|u \cap V(X)| = 1$.

Nous appelons *arête d’inondation (pour F)* une arête de plus basse altitude parmi les arêtes sortantes de $M(F)$. Nous avons montré [91] que toute arête d’inondation est une arête M-bord. Cette propriété permet d’établir un premier lien entre les amincissements par bord et l’un des plus célèbres algorithmes d’arbre de poids minimum [26]. Pour cela, il suffit de considérer la construction permettant de réduire le problème des forêts de poids minimum à celui des arbres de poids minimum. Dans ce cas, comme l’a remarqué F. Meyer [99], les arêtes considérées par l’algorithme de Prim sont exactement les mêmes que celles considérées dans une séquence d’abaissement utilisant la condition d’inondation pour détecter les arêtes M-bord.

Une *inondation d’une fonction F* est une fonction $H \in \mathcal{F}(E)$ obtenue à partir de F par abaissements itératifs des valeurs d’arêtes d’inondation ; s’il n’existe pas d’arête d’inondation pour une inondation H de F , on dit que H est un *noyau par inondation de F* ; dans ce cas, toute coupure pour les minima de H est appelée *coupure par inondation de F* .

Nous présentons maintenant le résultat principal de cette section. Il établit l’équivalence entre les coupures induites par les transformations d’abaissement de cette section et les coupures par LPE.

Théorème 75 (Théorème 21, Annexe C) *Soit $C \subseteq E$. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) C est une coupure par inondation de F ;
- (ii) C est une coupure par M-bord de F ;
- (iii) C est une coupure par bord de F ; et
- (iv) C est une coupure par LPE de F .

En fait, le théorème précédent est un corollaire d’une propriété plus forte (Lemme 20 dans [91]) qui établit l’équivalence entre les minima d’un noyau par inondation, d’un noyau par M-bord, d’un noyau par bord de F et les FPM relatives aux minima de F . C’est donc, en ce sens, que nous pouvons parler d’amincissements optimaux.

En utilisant les notions introduites dans cette section, nous dérivons un algorithme (Algorithme 2) efficace pour calculer les noyaux par M-bord et donc les LPE de F . Nous rappelons qu’une arête u est une arête de bord pour F si l’altitude de l’une de ces extrémités est égale à l’altitude de u et que l’altitude de l’autre est strictement inférieure à celle de u .

Algorithm 2: Noyau par M-bord

Data: (V, E, F) : un graphe à arêtes valuées ;
Result: F , un noyau par M-bord de la fonction d'entrée et M , ses minima.

```

1  $L \leftarrow \emptyset$  ;
2 Calculer  $M(F) = (V_M, E_M)$  et  $F(x)$  pour tout  $x \in V$  ;
3 foreach  $u \in E$  sortante de  $(V_M, E_M)$  do  $L \leftarrow L \cup \{u\}$  ;
4 while il existe  $u \in L$  do
5    $L \leftarrow L \setminus \{u\}$  ;
6   if  $u$  est une arête de bord pour  $F$  then
7      $x \leftarrow$  le sommet de  $u$  tel que  $F(x) < F(u)$  ;
8      $y \leftarrow$  le sommet de  $u$  tel que  $F(y) = F(u)$  ;
9      $F(u) \leftarrow F(x)$  ;  $F(y) \leftarrow F(u)$  ;
10     $V_M \leftarrow V_M \cup \{y\}$  ;  $E_M \leftarrow E_M \cup \{u\}$  ;
11    foreach  $v = \{y', y\} \in E$  telle que  $y' \notin V_M$  do  $L \leftarrow L \cup \{v\}$  ;
```

Pour atteindre une complexité linéaire, le graphe (V, E) peut être stocké en mémoire dans un tableau de listes qui associe à tout sommet la liste de sommets qui lui sont adjacents. Une application supplémentaire peut être utilisée pour accéder en temps constant aux deux sommets qui composent une arête. Néanmoins, dans les applications à l'analyse d'image et lorsque les relations d'adjacence usuelles sont utilisées, ces structures n'ont pas besoin d'être explicites. De plus, pour atteindre une complexité linéaire, les minima de F doivent être connus à chaque itération. Pour cela, dans une première étape (ligne 2), les minima de F sont calculés et stockés dans deux tableaux booléens V_M et E_M de tailles respectives $|V|$ et $|E|$. Cette étape peut être effectuée en temps linéaire grâce à des algorithmes connus depuis longtemps reposant par exemple sur un parcours des zones plates de F . Ensuite, dans la boucle principale, (ligne 4), après chaque abaissement de F (ligne 9), V_M et E_M sont mis à jour (ligne 10). Pour accéder, en temps constant, aux arêtes M-bord, les arêtes (non encore examinées) sortantes des minima sont stockées dans une liste L (lignes 3 et 11). Cet ensemble peut être implémenté, par exemple, par une pile. En conséquence de ces remarques, nous obtenons la complexité suivante.

Propriété 76 (Propriété 22, Annexe C) *A l'issue de l'Algorithme 2, F est un noyau par M-bord de F . De plus, l'algorithme 2 s'exécute en temps linéaire par rapport à $|E|$.*

Nous pointons le fait que l'Algorithme 2 ne requiert ni procédure de tri ni file de priorité – à la différence des algorithmes par inondation comme ceux présentés Section 1.3 et Section 3.3 – et donc, quel que soit l'intervalle des valeurs de la fonction F , il s'exécute en temps linéaire. A notre connaissance, il s'agit du premier algorithme de LPE vérifiant une telle propriété.

Il peut être également remarqué que dans l'Algorithme 2, si l'ensemble L est implémenté par une file d'attente hiérarchique (voir [95] et Section 3.3), alors la fonction résultante est également un noyau par bord. De plus, dans ce cas, la coupure induite est “centrée” (au sens de la distance induite par G) sur les plateaux. En contrepartie, cette version de l'Algorithme 2 s'exécute en temps-linéaire uniquement lorsque le nombre de valeurs distinctes prises par la fonction F est suffisamment faible (cf. Section 3.3). L'algorithme ainsi obtenu peut être perçu comme l'analogue, dans le cadre des graphes à arêtes valuées, de l'algorithme d'inondation permettant de calculer les C-LPE (voir Algorithme 1).

4.6 Flux et algorithme de LPE linéaire

Une LPE peut être calculée en temps linéaire grâce à l’Algorithme 2, quel que soit le graphe à arêtes valuées. Cet algorithme, dans une première étape (ligne 2), extrait les minima de la fonction d’entrée. Dans cette section, nous introduisons un second algorithme linéaire. Tout comme l’algorithme précédent, il ne requiert ni procédure de tri ni file de priorité. De plus, contrairement à l’Algorithme 2, il ne nécessite pas de pré-calculer les minima. A notre connaissance, cet algorithme n’a aucun équivalent dans la littérature.

Dans la première partie de cette section, nous introduisons les outils mathématiques qui permettent de démontrer l’algorithme proposé. En particulier, nous étudions une notion originale de *flux* qui s’avère cruciale dans ce paradigme de calcul. Ensuite, l’algorithme est présenté et sa complexité analysée.

Définition 77 (flux) Soit $L \subseteq V$. On dit que L est un flux si, pour toute paire de points x et y de L , il existe, dans L , soit un chemin de x à y soit de y à x qui est un chemin de plus grande pente pour F .

Soit L un flux et x un sommet de L . On dit que x est une source (resp. puits) de L si l’altitude de x est supérieure (resp. inférieure) ou égale à l’altitude de tout autre sommet y de L .

Remarquons que si L est un flux et x un puits (resp. une source) de L , alors, de tout point $y \in L$ à x (resp. de x à tout point $y \in L$), il existe un chemin, dans L , qui est de plus grande pente pour F . Notons qu’il existe au moins une source (resp. un puits) pour tout flux L mais que cette source (resp. ce puits) n’est pas nécessairement unique.

Pour illustrer les définitions précédentes, nous supposons que G et F sont les graphe et fonction de la Figure 4.5a. Les ensembles $L = \{a, b, e, i\}$ et $\{j, m, n\}$ sont des flux. En revanche, l’ensemble $L' = \{i, j, k\}$ n’est pas un flux car il n’existe pas de chemin dans L' , entre i et k , qui soit de plus grande pente pour F . Les ensembles $\{a, b\}$ et $\{i\}$ sont respectivement les ensembles de puits et de sources de L .

L’algorithme présenté plus bas repose sur l’extraction itérative de flux. Avant de mettre en œuvre cette procédure, étudions la concaténation de flux.

Soient L_1 et L_2 deux flux distincts (*i.e.*, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$) et soit $L = L_1 \cup L_2$. On dit que L_1 est sous L_2 , et l’on écrit $L_1 \prec L_2$, s’il existe une source x de L_1 et un puits y de L_2 , tels qu’il existe, dans L , un chemin de plus grande pente de y à x .

Notons que, si $L_1 \prec L_2$, alors L est également un flux.

On dit que L est un \prec -flux s’il n’existe aucun flux sous L .

Dans la Figure 4.5a le flux $\{a, b, e, i\}$ est sous le flux $\{j, m, n\}$ et donc $\{a, b, e, i, j, m, n\}$ est aussi un flux. De plus, il n’existe aucun flux sous $\{a, b, e, i\}$ et sous $\{a, b, e, i, j, m, n\}$. Ces deux flux sont donc des \prec -flux.

Les flux extraits par notre algorithme sont des \prec -flux. Comme nous l’avons annoncé dans l’introduction, cet algorithme ne requiert pas de pré-calculer les minima. En fait, comme le montre la propriété ci-dessous, il existe une relation forte entre \prec -flux et minima.

Propriété 78 (Propriété 24, Annexe C) Soit L un flux. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) L est un \prec -flux;
- (2) L contient l'ensemble des sommets d'un minimum de F ; et
- (3) pour tout $y \in V \setminus L$ adjacent à un puits x de L , $F(\{x, y\}) > F(x)$.

Dans la Figure 4.5a les deux \prec -flux $\{a, b, e, i\}$ et $\{a, b, e, i, j, m, n\}$ contiennent l'ensemble $\{a, b\}$ qui est lui même l'ensemble des sommets d'un minimum de F .

Nous pouvons remarquer que tout flux L qui contient un \prec -flux est lui-même un \prec -flux. Nous notons également que si L est un \prec -flux, l'ensemble de tous ses puits constitue précisément l'ensemble des sommets d'un minimum de F . Pour aller plus loin, nous pouvons voir qu'un sous-ensemble L de V est l'ensemble des sommets d'un minimum de F si et seulement si c'est un \prec -flux minimal pour la relation d'inclusion, i.e., aucun sous-ensemble strict de L n'est un \prec -flux.

Afin de partitionner l'ensemble V , et donc de déduire une coupure, nous pouvons, grâce aux \prec -flux de F , arranger les sommets de G de la manière suivante.

Soit $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ un ensemble de n \prec -flux. On dit que \mathcal{L} est une *famille de flux* si :

- $\cup\{L_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} = V$; et
- pour tous éléments distincts L_1 et L_2 de \mathcal{L} , si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, alors $L_1 \cap L_2$ est l'ensemble des sommets d'un minimum de F .

Soit \mathcal{L} une famille de flux et $x \in V$. Nous remarquons que, soit x appartient à un minimum de F (et dans ce cas, il peut appartenir à plusieurs éléments de \mathcal{L}), ou soit x appartient à un unique \prec -flux de \mathcal{L} qui lui même contient l'ensemble des sommets d'un unique minimum de F . Donc, grâce à \mathcal{L} , nous pouvons associer à chaque sommet x de G un unique minimum de F .

Définition 79 (coupure par flux) Soit \mathcal{L} une famille de flux. Nous notons par M_1, \dots, M_n les minima de F . Soit Ψ l'application de V dans $\{1, \dots, n\}$ qui associe à chaque sommet x de V , l'index (étiquette) i tel que M_i est le seul minimum de F inclus dans un \prec -flux de \mathcal{L} qui contient x ; Nous disons que Ψ est une *partition par flux* de F .

Si Ψ est une partition par flux de F , nous disons que l'ensemble $C = \{\{x, y\} \in E \mid \Psi(x) \neq \Psi(y)\}$ est une *coupure par flux* de F .

L'algorithme que nous allons expliciter produit une partition par flux, et donc une coupure par flux. Le théorème suivant est une conséquence des définitions de familles de flux, de coupures par bassin et du théorème de consistance. Il établit l'équivalence entre coupures par flux et par LPE. Il constitue ainsi l'outil principal pour démontrer la justesse de l'Algorithme 3.

Théorème 80 (Théorème 26, Annexe C) Soit $C \subseteq E$. L'ensemble C est une LPE de F si et seulement si C est une coupure par flux de F .

Nous présentons maintenant l'Algorithme 3 qui calcule une partition par flux et donc, d'après le Théorème 80, une LPE. Il assigne itérativement une étiquette à chaque sommet du graphe. Dans ce but, pour chaque point x , il extrait un flux L , composé de points non encore étiquetés et dont la source est x (ligne 4). Si L est un \prec -flux (ligne 5), une nouvelle étiquette est assignée à tous les points de L . Sinon (ligne 8), il existe un \prec -flux L_1 sous L qui est déjà étiqueté. Dans ce cas les éléments de L reçoivent l'étiquette de L_1 (ligne 9). La fonction **Flux**, invoquée à la ligne 4, permet d'extraire L . Intuitivement, elle explore les chemins de plus grande pente, en mélangeant des itérations en profondeur d'abord et en largeur d'abord. Les invariants principaux de cette fonction sont : *i*), l'ensemble L est, à chaque itération, un flux; et *ii*), l'ensemble L' regroupe tous les puits de L non encore explorés. La fonction s'arrête à la ligne 17, lorsque

tous les puits de L ont été explorés ou, à la ligne 9, si un point z déjà étiqueté est découvert lors de l'exploration. Dans le premier cas, d'après la Propriété 78, le flux L , qui est retourné, est un \prec -flux. Dans le second, l'étiquette lab du sommet z est également retournée et on peut voir qu'il existe un puits y de L tel que $\langle y, z \rangle$ est un chemin de plus grande pente. Pour cette raison, nous pouvons garantir qu'il existe un \prec -flux L_1 , sous L , qui est inclus dans l'ensemble des sommets étiquetés lab . Nous déduisons donc, d'après les remarques précédentes, qu'à l'issue de l'Algorithme 3, Ψ est une partition par flux de F . En utilisant les structures de données présentées Section 4.5.2, nous obtenons une complexité linéaire.

Algorithm 3: Coupure par Flux

Data: (V, E, F) : un graphe à arêtes valuées;
Result: Ψ : une partition par flux de F .
1 **foreach** $x \in V$ **do** $\Psi(x) \leftarrow NO_LABEL$;
2 $nb_labs \leftarrow 0$; /* le nombre de minima déjà trouvées */
3 **foreach** $x \in V$ *tel que* $\Psi(x) = NO_LABEL$ **do**
4 $[L, lab] \leftarrow \text{Flux}(V, E, F, \Psi, x)$;
5 **if** $lab = -1$ **then** /* L est un \prec -flux */
6 nb_labs++ ;
7 **foreach** $y \in L$ **do** $\Psi(y) \leftarrow nb_labs$;
8 **else**
9 **foreach** $y \in L$ **do** $\Psi(y) \leftarrow lab$;

Propriété 81 (Propriété 27, Annexe C) *L'Algorithme 3 retourne une application Ψ qui est une partition par flux de F . De plus, l'Algorithme 3 s'exécute en temps linéaire par rapport à $|E|$.*

Nous remarquons que, dans la fonction `Flux`, l'utilisation d'itérations en largeur d'abord est nécessaire pour garantir que le flux retourné soit bien un \prec -flux. Sinon, si seules des itérations en profondeur d'abord étaient utilisées, la fonction `Flux` pourrait être "bloquée" sur des plateaux (*i.e.*, sous-graphe connexe de G d'altitude constante) car certains puits de L ne seraient jamais explorés.

Dans la partie annexe à ce chapitre (Section 4.10), nous présentons une alternative à cet algorithme qui utilise la récursion pour garantir que l'ensemble retourné par la fonction `Flux` soit bien un \prec -flux.

4.7 Coupures par LPE, forêts de plus courts chemins et LPE topologiques

Comme nous allons le voir dans cette section, le cadre de travail développé dans ce chapitre permet de comprendre les liens et différences entre la LPE et d'autres paradigmes utilisés pour segmenter une image. Grâce aux notions de FPM et de noyau par bord, nous comparons, au sens théorique, les coupures par LPE aux :

- forêts de plus courts chemins qui constituent le socle de la Transformée Image Forêt (IFT) [68] et de la segmentation d'image par connexité floue [61, 113]; et
- LPE topologiques (Sections 1.3.5 et 3.4).

Function Flux(V, E, F, Ψ, x)

Data: (V, E, F) : un graphe à arêtes valuées ; Ψ : un étiquetage de V ; x : un point de V .

Result: $[L, lab]$ où L est un flux tel que x est une source de L , et lab est soit l'étiquette d'un \prec -flux sous L , soit -1 .

```

1   $L \leftarrow \{x\}$  ;
2   $L' \leftarrow \{x\}$  ; /* l'ensemble des sources non encore explorée de  $L$  */
3  while there exists  $y \in L'$  do
4       $L' \leftarrow L' \setminus \{y\}$  ;
5       $breadth\_first \leftarrow TRUE$  ;
6      while ( $breadth\_first$ ) et (il existe  $\{y, z\} \in E$  tel que  $z \notin L$  et  $F(\{y, z\}) = F(y)$ )
7          do
8              if  $\Psi(z) \neq NO\_LABEL$  then
9                  /* il existe un  $\prec$ -flux sous  $L$  déjà étiqueté */
10                 retourner  $[L, \Psi(z)]$  ;
11             else if  $F(z) < F(y)$  then
12                  $L \leftarrow L \cup \{z\}$  ; /*  $z$  est maintenant le seul puits de  $L$  */
13                  $L' \leftarrow \{z\}$  ; /* basculer dans une phase d'exploration en profondeur d'abord */
14                  $breadth\_first \leftarrow FALSE$  ;
15             else
16                  $L \leftarrow L \cup \{z\}$  ; /*  $F(z) = F(y)$ , donc  $z$  est aussi un puits de  $L$  */
17                  $L' \leftarrow L' \cup \{z\}$  ; /* continuer l'exploration en largeur d'abord */
18 retourner  $[L, -1]$  ;
```

4.7.1 Valeur de connexion

La valeur de connexion tient une place prépondérante à la fois dans l'approche topologique de la LPE (Théorème 23) et dans les définitions des méthodes reposant sur les forêts de plus courts chemins. Pour attaquer cette section, nous adaptons la définition de valeur de connexion des sous-ensembles de E aux sous-graphes de G . Puis, nous montrons que toute FPM relative à un sous-graphe X de G "préserve" les valeurs de connexion entre les composantes de X .

Définition 82 Soit $\pi = \langle x_0, \dots, x_\ell \rangle$ un chemin dans G . Si π est non trivial, nous posons $F(\pi) = \max\{F(\{x_{i-1}, x_i\}) \mid i \in [1, \ell]\}$. Si π est trivial, nous posons $F(\pi) = F(x_0)$.

Soient X et Y deux sous-graphes de G , $\Pi(X, Y)$ désigne l'ensemble de tous les chemins de X à Y dans G .

La valeur de connexion entre X et Y (dans G et pour F) est $F(X, Y) = \min\{F(\pi) \mid \pi \in \Pi(X, Y)\}$.

Soit X un sous-graphe de G . Le théorème suivant établit que, si la valeur de connexion entre deux composantes de X est égale à k , alors la valeur de connexion entre les deux composantes correspondantes d'une FPM relative à X est aussi k : les FPM relatives préservent les valeurs de connexion.

Théorème 83 (Théorème 29, Annexe C) Soit X un sous-graphe de G . Si Y est un FPM relative à X , alors pour toute paire de composantes A et B de X , nous avons $F(A, B) = F(A', B')$, où A' et B' sont les deux composantes de Y telles que $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$.

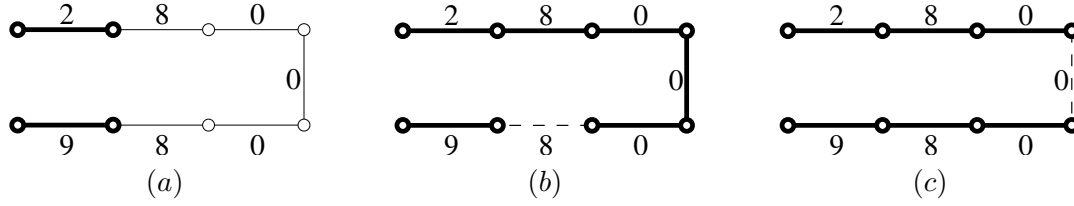


FIG. 4.6 – Forêts de plus courts chemins.

Un graphe G et une fonction F . Les sommets et arêtes en gras sont : (a), un graphe X ; (b), une FPM relative à X ; (c), une FPCC relative à X qui n'est pas une FPM relative à X .

Par exemple, dans la Figure 4.5a, la valeur de connexion entre les deux minima d'altitude 1 est égale à 4. On peut vérifier que la valeur de connexion entre les deux composantes correspondantes des FPM relatives aux minima (Figures. 4.5c et d), est aussi 4.

Soit $C \subseteq E$ une LPE de F . Un corollaire immédiat du Théorème 83, est que la valeur de connexion entre deux bassins d'attraction de C (*i.e.*, deux composantes de \overline{C}) est égale à la valeur de connexion entre les deux minima de F correspondant. En bref, la LPE dans les graphes à arêtes valuées préserve les valeurs de connexion.

4.7.2 Forêts de plus courts chemins

Nous étudions maintenant les liens entre les FPM relatives et les forêts de plus courts chemins. La Transformée Image Forêt [68], la LPE inter-pixel (Section 1.3.4, Chapitre 1), et la segmentation par connexité floue [49, 61, 66, 113] sont des cas particuliers de forêts de plus courts chemins. Intuitivement, ces méthodes partitionnent le graphe de l'image en composantes connexes associées à des points “graines”. La composante de chaque “graine” correspond aux points qui sont “plus fortement connectés” à cette graine qu'à toutes les autres. Dans de nombreux cas, pour définir la relation “est plus fortement connecté à”, la valeur de connexion est précisément la mesure choisie, *i.e.*, un chemin π' est considéré plus court qu'un chemin π si $F(\pi') < F(\pi)$. Les régions ainsi définies peuvent être obtenues au moyen d'une forêt de plus courts chemins. Nous allons montrer que tout FPM relative à un sous-graphe X est une forêt de plus court chemin relative à X et que la réciproque n'est pas vraie. Nous démontrons, de plus, que ces deux notions sont équivalentes lorsque le sous-graphe X correspond aux minima de la fonction.

Si x est un sommet de G , pour simplifier les notations, le graphe $(\{x\}, \emptyset)$ est noté x .

Définition 84 (coupure par FPCC) Soient X et Y deux sous-graphes de G .

On dit que Y est une forêt de plus courts chemins relative à X si Y est une forêt relative à X et si, pour tout $x \in V(Y)$, il existe, de x à X , un chemin π dans Y tel que $F(\pi) = F(x, X)$.

Si Y est une forêt de plus courts chemins relative à X et que $V(Y) = V$, on dit que Y est une forêt couvrante de plus courts chemins (FPCC) relative à X . Dans ce cas, l'unique coupure induite par Y est appelée coupure par FPCC relative à X .

Soit G le graphe de la Figure 4.6 et soit F la fonction associée. Soient X, Y et Z les sous-graphes en gras des Figures. 4.6a,b et c. Les deux graphes Y et Z sont des FPCC relatives à X .

Propriété 85 (Propriété 30, Annexe C) *Soient X et Y deux sous-graphes de G . Si Y est une FPM relative à X , alors Y est une FPCC relative à X . De plus, toute coupure par FPM relative à X est une coupure par FPCC relative à X .*

La réciproque de la Propriété 85 n'est, en général, pas vraie. Par exemple, le graphe Z (Figure 4.6c), est une FPCC relative à X (Figure 4.6a) alors que ce n'est pas une FPM relative à ce graphe. Sur le même exemple (Figure 4.6c), nous pouvons aussi observer que, contrairement aux FPM relatives, les FPCC ne préservent pas toujours les valeurs de connexion (au sens du Théorème 83). En particulier, dans la Figure 4.6, la valeur de connexion entre les deux composantes de X est égale à 8, alors que la valeur de connexion entre les deux composantes de Z est égale à 0.

En fait, si le graphe X correspond aux minima de F , l'équivalence entre les deux concepts peut être établie.

Propriété 86 (Propriété 31, Annexe C) *Soit X un sous-graphe de G . Une condition nécessaire et suffisante pour que X soit une FPCC relative à $M(F)$ est que X soit une FPM relative à $M(F)$. De plus, un sous-ensemble de E est une LPE de F si et seulement si c'est une coupure par FPCC relative à $M(F)$.*

Alors que les notions de FPM et FPCC relatives sont équivalentes lorsque l'on considère les minima de F , dans le cas général, les FPM satisfont des propriétés additionnelles comme la préservation des valeurs de connexion ou l'optimalité (au sens de la Définition 67). Les FPM relatives constituent donc une méthode de choix pour les procédures de segmentation qui doivent être initialisées par des marqueurs (graines) appartenant aux objets d'intérêt. Une illustration de ces procédures est présentée dans la Section 4.8.2.

4.7.3 LPE topologiques

Dans la Section 1.3.5, nous avons vu l'équivalence entre une classe de fonctions (appelées séparations fortes dans la Définition 22) préservant les valeurs de connexion et les LPE topologiques. De ce fait, le Théorème 83 nous invite à retrouver les liens entre coupures par LPE et LPE topologiques.

Afin d'atteindre cet objectif, nous rappelons la définition de graphe d'arêtes (Définition 27). Ce concept nous fournit un moyen simple d'inférer automatiquement aux graphes à arêtes valuées les définitions et propriétés démontrées pour les graphes à sommets valués.

Le *graphe d'arêtes* de $G = (V, E)$ est le graphe (E, E') , tel que $\{u, v\}$ appartient à E' si et seulement si $u \in E$, $v \in E$, et u et v sont adjacentes, i.e., $|u \cap v| = 1$.

A chaque graphe G dont les arêtes sont pondérées par une fonction de coût, nous pouvons associer son graphe d'arêtes G' . Les sommets de G' sont pondérés par F et donc toute transformation de F peut être effectuée indifféremment dans G ou dans G' . La Figure 4.7 illustre cette procédure. Soit G le graphe des sous-figures (a), (b) et (c). Le graphe d'arêtes de G est présenté en (d), (e) et (f). La fonction des figures (b) et (e) est une LPE topologique de celle des figures (a) et (d). La fonction des figures (c) et (f) est un noyau par bord.

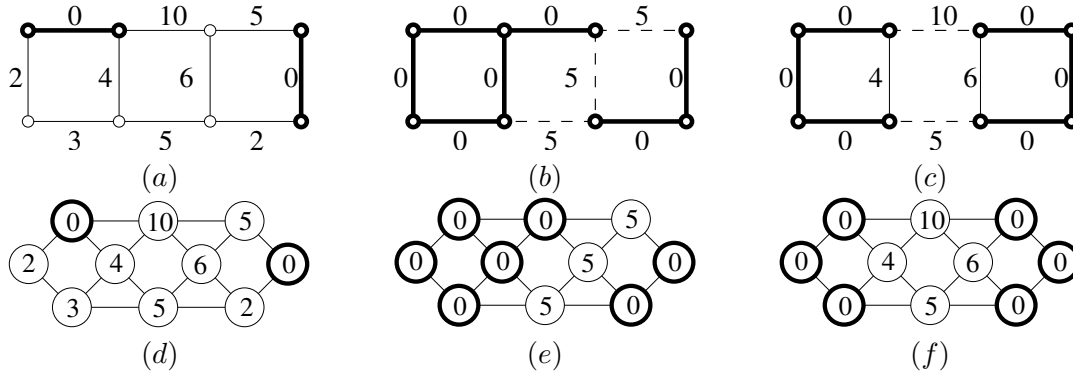


FIG. 4.7 – LPE et graphes d'arêtes.

Le graphe (d) (resp. (e), (f)) est le graphe d'arêtes du graphe (a) (resp. (b), (c)). Les minima des fonctions sont représentés en gras. (c, f), La fonction est un noyau par bord de la fonction présentée en (a, d); (b, e) et (c, f), les fonctions sont des W-amincissements de (a, d); la fonction représentée en (b, e) est de plus une LPE topologique de (a, d).

Définition 87 (coupure topologique) Soit $C \subseteq E$. On dit que C est une coupure topologique de F , s'il existe un W-amincissement H de F (dans le graphe d'arêtes de G) tel que C est l'unique coupure relative à $M(H)$.

Propriété 88 (Propriété 35, Annexe C) Soit $H \in \mathcal{F}(E)$. Si H est un amincissement par bord de F dans G , alors H est un W-amincissement de F dans le graphe d'arêtes de G . De plus, toute coupure par bord de F est une coupure topologique de F .

La propriété précédente est illustrée Figure 4.7 où la fonction Figure 4.7c est un amincissement par bord de F (Figure 4.7a), et donc un W-amincissement de F . La réciproque de la Propriété 88 n'est pas vraie. La fonction H (Figure 4.7b) est une LPE topologique de F mais n'est pas un noyau par bord de F . En effet, il n'existe aucune FPM relative aux minima de F qui induise la coupure produite par la LPE topologique H . Observons, en particulier, que cette coupure par LPE topologique ne se situe pas sur les plus hautes "crêtes" de F .

Une conséquence importante de la Propriété 88 est que les coupures par bord (donc, d'après le Théorème 75, les coupures par LPE) héritent directement des propriétés mathématiques des W-amincissements et LPE topologiques prouvées dans le cadre des graphes à sommets valués (voir en particulier Section 1.3.5, Chapitre 1).

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié et proposé des solutions aux problèmes rencontrés par les méthodes de fusion de régions qui considèrent, comme segmentation initiale, une frontière constituée de pixels. Nous avons introduit (Définition 44) une relation d'adjacence sur \mathbb{Z}^n adaptée à la fusion de régions. Une propriété importante (Théorème 45) est que les grilles induites, appelées grilles de fusion parfaites, sont des graphes d'arêtes. Comme le suggéraient les résultats (Propriété 60) du Chapitre 3, si nous considérons une fonction qui pondère les sommets de cette grille, alors les définitions et propriétés de ce chapitre sont encore valides. Les grilles de fusion parfaites constituent donc une alternative intéressante aux grilles usuelles pour définir une LPE d'une image qui soit consistante et satisfasse le principe de la goutte d'eau.

4.8 Illustrations et résultats expérimentaux

Afin d'illustrer en analyse d'images les notions introduites dans ce chapitre, nous présentons deux schémas reposant sur les coupures par LPE et FPM. Dans la Section 4.8.1, nous dérivons, du cadre classique de la morphologie mathématique, une procédure qui permet de segmenter une image en un nombre prédéfini de régions. La seconde illustration (Section 4.8.2) montre comment les FPM peuvent être utilisées dans une procédure semi-automatique de segmentation. Pour finir, nous présentons des temps de calcul de plusieurs algorithmes de LPE et les comparons avec ceux des algorithmes introduits dans ce chapitre.

4.8.1 Segmentation en k régions

Pour illustrer l'utilisation des coupures par LPE dans une application pratique nous adaptons un schéma classique de la morphologie. Dans cette section, nous supposons que V est le domaine d'une image bidimensionnelle, plus précisément un sous-ensemble rectangulaire de \mathbb{Z}^2 . Une image I est une application de l'ensemble des pixels V dans un sous-ensemble des entiers positifs. Nous considérons la relation de 4-adjacence définie par : $\forall x, y \in V, \{x, y\} \in E$ ssi $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Enfin, la fonction F , de E dans \mathbb{Z} , qui pondère les arêtes de G , est définie pour tout $\{x, y\} \in E$ par $F(\{x, y\}) = |I(x) - I(y)|$. Notons que des formulations plus élaborées peuvent aussi être adoptées pour définir F (voir [57, 79] ou une adaptation du détecteur optimal de contours de Deriche [35]).

A cause du bruit inhérent à toute acquisition d'image, une ligne de partage des eaux de F définirait un trop grand nombre de bassins d'attraction. La sur-segmentation est une caractéristique connue de tous les algorithmes de LPE. Elle s'explique par le nombre important de minima. Pour supprimer de nombreux minima insignifiants, il est courant d'appliquer, dans une étape de pré-traitement, une opération de fermeture [10, 40]. En particulier, les filtres par attributs [51] (aire, dynamique, volume) se révèlent être des opérateurs puissants pour réaliser cette tâche. Pour cette illustration, nous adaptons un filtrage classique aux cas des graphes à arêtes valuées.

L'idée intuitive est de remplir progressivement les minima de F qui ne sont pas suffisamment "importants". Pour appliquer cette idée, il est nécessaire de quantifier l'importance relative d'un minimum. Pour cela, nous définissons l'*aire* d'un sous-graphe de G (e.g., un minimum de F) comme étant le nombre de ses sommets. Afin de "remplir" un minimum M de F jugé non significatif (par rapport à sa surface), nous considérons la transformation qui consiste à élever de 1 l'altitude de toutes les arêtes de M . Un problème courant en analyse d'image est celui de la segmentation d'une image en k régions (où k est un nombre prédéfini). Pour résoudre ce problème en utilisant une coupure par LPE, il est nécessaire de disposer d'une fonction de coût qui contient exactement k minima. Pour cela, la transformation présentée ci-dessus est itérée jusqu'à ce que F contienne k minima (voir [78] pour une implémentation efficace de ce filtre).

Les Figures. 4.8a,b, présentent les résultats que nous avons obtenus sur l'image du cameraman ci-après. Pour cette illustration, k a été fixé à 22. Afin d'évaluer ce résultat, nous avons aussi utilisé une approche similaire reposant sur les graphes à sommets valués. Plus précisément nous avons : (i), calculé la norme d'un gradient de l'image de départ (soit le détecteur de contours optimal de Deriche [35] pour les Figures. 4.8c,d soit un gradient morphologique (voir, le chapitre 3.10.1 de [15]) pour les Figures. 4.8e,f); (ii), filtré par surface ($k = 22$) le gradient ; et (iii),

calculé une LPE inter-pixel (par inondation, voir la Section 1.3.4 du Chapitre 1) de la fonction filtrée. On pourra, en particulier, observer la qualité de la délinéation du visage de l'homme en (b) comparée à (d) et (f). D'après cette illustration nous pouvons conclure qu'il existe certaines situations pratiques pour lesquelles les lignes de partage des eaux dans le cadre des graphes à arêtes valuées produisent une délinéation plus précise que les lignes de partage des eaux dans les graphes à sommets valués.



FIG. 4.8 – Coupure par LPE appliquée à une image réelle.

Les LPE obtenues après filtrage [voir texte] sont superposées en blanc aux images initiales. (a, b) Coupure par LPE; (c, d) Détecteur optimal de contours de Deriche et LPE inter-pixel; et (e, f) Gradient morphologique et LPE inter-pixel. Pour chaque image, la résolution a été doublée pour pouvoir superposer les contours.

4.8.2 Procédure semi-automatique de segmentation

Une autre application classique en morphologie mathématique consiste à utiliser la LPE de manière inter-active. Pour cela, un utilisateur “peint” sur une image des marqueurs correspondant aux objets à segmenter. L’action de “peindre” un marqueur correspond à la sélection de certains sommets du graphe sous-jacent. Soit M cet ensemble de sommets. À partir de l’ensemble M , on détermine le sous-graphe M^+ composé des sommets de M et des arêtes qui relient deux éléments de M (i.e., $M^+ = (M, \{\{x, y\} \in E \mid x \in M, y \in M\})$). Ensuite, une FPM relative à M^+ est calculée. Pour cette application, nous avons utilisé un algorithme dérivant de celui de Prim [26].

Cette procédure inter-active est illustrée Figures. 4.9a,b et c. Pour comparaison, nous montrons également les résultats obtenus grâce à une LPE inter-pixel (avec marqueurs) [95, 41] du gradient de l’image (ou bien le détecteur optimal de contours de Deriche, Figures. 4.9d, ou bien le gradient morphologique Figures. 4.9e). Nous pouvons remarquer la qualité de la segmentation 4.9c, comparée à celles en (d) et (e). Observons, en particulier, le comportement de notre approche dans les zones faiblement contrastées et autour des zones minces (queue) de la pomme. Le meilleur comportement de notre approche dans les zones minces peut s’expliquer par la différence de granularité entre le gradient obtenu sur les arêtes de G et ceux sur les sommets de G . Une fonction valant les sommets de G peut difficilement définir une “crête” précise autour d’une zone d’un pixel d’épaisseur. En revanche, cela ne pose pas de problème pour une fonction sur les arêtes. D’autre part, la fonction de valuation sur les arêtes ne prend en compte qu’un voisinage restreint (pour chaque arête, les deux pixels qui la compose) alors que les gradients morphologiques et de Deriche dépendent d’un voisinage plus grand. Ces derniers effectuent ainsi un lissage spatial qui atténue les contours dans les zones de faible variation d’intensité.

4.8.3 Temps d’exécution de quelques algorithmes de LPE

La Figure 4.10 présente les temps d’exécution (sur un ordinateur portable conventionnel) de quelques algorithmes de LPE. Pour ceux qui le nécessitent, le pré-calcul des minima est inclus dans les temps d’exécution. Pour chaque taille d’image, la valeur présentée Figure 4.10 correspond au temps d’exécution moyen sur dix images testées. On remarque que, comme le suggérerait l’analyse théorique, les deux algorithmes proposés dans ce chapitre sont les plus rapides. Par exemple l’algorithme Coupure par Flux s’exécute cinq fois plus vite que l’algorithme d’inondation (inter pixel) pour des images de 2048^2 pixels.

4.9 Conclusions

La Figure 4.11 résume les résultats principaux de ce chapitre. Dans le cadre unifiant des graphes à arêtes valuées, nous avons mis à jour les liens forts qui existent entre différents paradigmes liés à la LPE : le paradigme topographique, le paradigme des transformations en niveaux de gris et deux paradigmes d’optimalité. Pour cela, nous avons introduit de nouvelles notions de LPE (coupures par LPE, par bassins, par bord et par M-bord) et prouvé l’équivalence entre les coupures par LPE, par bassins, par inondation, par M-bord, par bord, par FPCC relatives aux minima et par FPM relatives aux minima. De plus nous avons montré que toutes ces coupures sont des coupures topologiques et donc héritent des propriétés mathématiques des LPE topologiques. Nous avons proposé deux algorithmes originaux (reposant sur les paradigmes de transformation en niveaux de gris et topographique) pour calculer les coupures par LPE. Ces

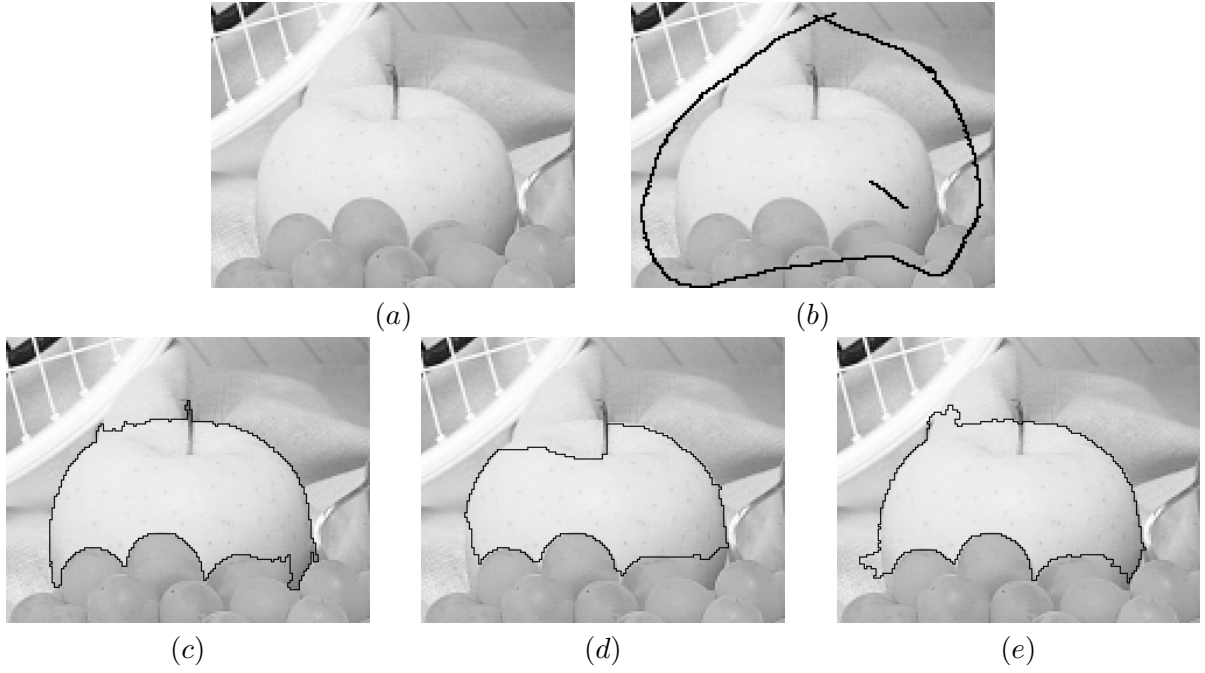


FIG. 4.9 – LPE à partir de marqueurs sur une image réelle.

(a), Image originale ; (b), les marqueurs sont superposés en noir. Sur la seconde ligne les LPE sont superposées en noirs à l'image originale. (c), FPM relative ; (d), LPE inter-pixel du détecteur optimal de contours de Deriche ; (e), LPE inter-pixel du gradient morphologique de l'image.

deux algorithmes s'exécutent en temps linéaire quel que soit l'intervalle des valeurs prises par la fonction d'entrée. A notre connaissance, il s'agit des premiers algorithmes de LPE qui satisfont une telle propriété. De plus, d'après nos expérimentations, ils sont aussi les plus rapides en pratique. Finalement, les concepts définis ont été testés en segmentation d'images. Les résultats obtenus suggèrent que l'approche proposée améliore, dans certains cas, la précision des contours extraits par des méthodes reposant sur la LPE.

4.10 Annexe du Chapitre 4 : algorithme récursif de coupure par flux

Dans cette section, nous proposons, sans en discuter, une alternative à l'Algorithme 3. Cette variante tire parti d'appels récursifs pour calculer les flux. Dans certains cas, elle s'exécute légèrement plus rapidement que la version présentée Section 4.6.

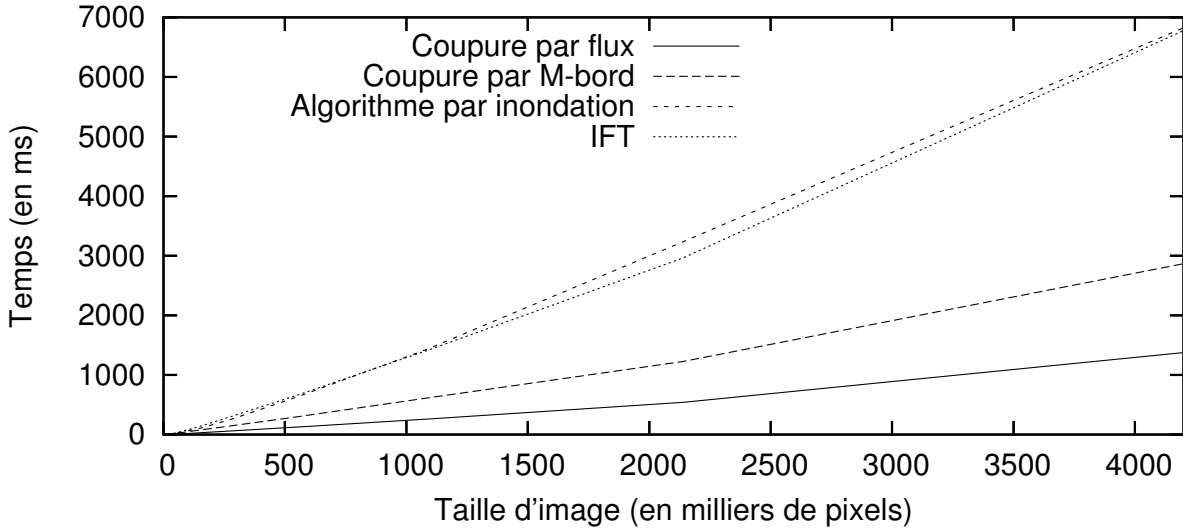


FIG. 4.10 – Temps d'exécution de quatre algorithmes de LPE. LPE par inondation (inter-pixel) [95], LPE par Transformée Image Forêt (IFT) [105] et les deux algorithmes (Noyau par M-bord et Coupure par Flux) proposés dans ce chapitre.

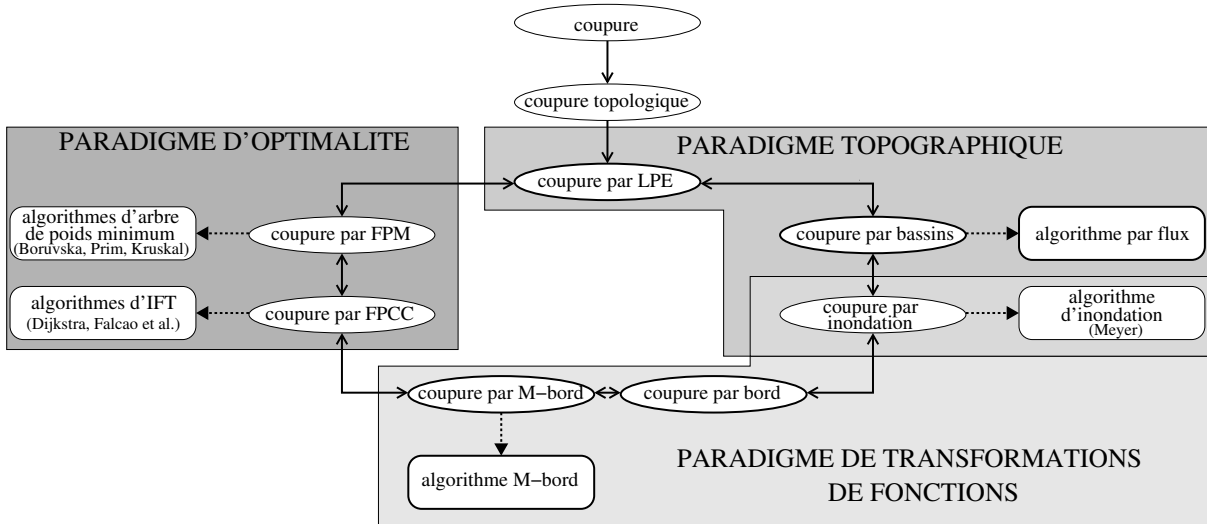


FIG. 4.11 – Résumé des propriétés des LPE sur les arêtes.

Les coupures sont toutes relatives aux minima d'une fonction. Dans la figure, $N \leftarrow N'$ signifie que la notion N est un cas particulier de la notion N' , donc, $N \leftrightarrow N'$ signifie que les notions N et N' sont équivalentes; $A \dashleftarrow N$ signifie que la notion N peut être calculée par l'algorithme A . Les nouvelles notions introduites dans ce chapitre sont en gras.

Algorithm 5: Coupure par flux (2)

Data: (V, E, F) : un graphe à arêtes valuées ;
Result: Ψ : une partition par flux de F .

```

1 foreach  $x \in V$  do
2    $\Psi(x) := NO\_LABEL$  ;
3  $nb\_labs := 0$  ; /* le nombre de minima déjà trouvés */
4 foreach  $x \in V$  tel que  $\Psi(x) = NO\_LABEL$  do
5    $[L, y, z] := \text{Flux2}(V, E, F, \Psi, x)$  ;
6   if  $z = \emptyset$  then
7     /*  $L$  est un  $\prec$ -flux */
8      $nb\_labs++$  ;
9     foreach  $x' \in L$  do
10       $\Psi(x') := nb\_labs$  ;
11   else
12     foreach  $x' \in L$  do
13       $\Psi(x') := \Psi(z)$  ;

```

Function Flux2(V, E, F, Ψ, x)

Data: (V, E, F) : un graphe à arêtes valuées ; Ψ : un étiquetage de V ; x : un point de V .
Result: $[L, y, z]$ où L est un flux tel que x est une source de L , y un puits de L et z est soit un point de V soit -1.

```

1  $\Psi(x) := IN\_PROCESS$  ;
2  $L := \{x\}$  ;
3  $y := x$  ; /*  $y$  est un puits de  $L$  */
4 if  $\exists \{y, z\} \in E$  tel que  $(\Psi(z) \notin \{NO\_LABEL, IN\_PROCESS\})$  et  $F(y) = F(\{y, z\})$ 
   then
5    $\text{retourner } [L, y, z]$  ;
6 foreach  $\{y, t\} \in E$  tel que  $(\Psi(t) = NO\_LABEL)$  et  $(F(y) = F(\{y, t\}))$  do
7    $[L', y', z'] := \text{Flux2}(V, E, F, \Psi, t)$  ;
8    $L := L' \cup L$  ;
9   if  $F(y') < F(y)$  then
10    /*  $y'$  est un puits de  $L$  alors que  $y$  ne l'est plus */
11     $\text{retourner } [L, y', z']$  ;
12   else if  $(z' \neq \emptyset)$  then
13    /* il existe un  $\prec$ -flux sous  $L$  qui est déjà étiqueté */
14     $\text{retourner } [L, y', z']$  ;
15   /*  $y$  est toujours à la fois un puits et une source de  $L$  */
16  $\text{retourner } [L, y, \emptyset]$  ;

```

Chapitre 5

Segmentation cardiaque spatio-temporelle

5.1 Introduction

Les progrès dans le domaine de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) permettent d'obtenir [37] des séquences d'images tridimensionnelles du cœur acquises successivement pendant le cycle cardiaque. Afin d'interpréter de telles séquences spatio-temporelles, les cardiologues sont confrontés à deux difficultés fondamentales.

1. Comment représenter l'évolution au cours du battement cardiaque de la géométrie d'une structure d'intérêt comme le myocarde (muscle cardiaque) ?
2. Comment déterminer des mesures précises permettant d'évaluer le bon fonctionnement de ces structures ?

A partir des images brutes – qui correspondent à environ 250 images bidimensionnelles par séquence spatio-temporelle – répondre à la première question implique la visualisation mentale d'objets tridimensionnels évoluant au cours du temps. Quant à la deuxième question, y répondre est impossible sans recourir à des méthodes numériques. Pour résoudre ces deux problèmes et donc exploiter pleinement le potentiel offert par les capteurs d'images médicales, l'assistance d'outils informatiques est alors nécessaire.

Dans les chaînes d'analyse informatique des images, l'étape cruciale est la segmentation, c'est-à-dire, la localisation spatiale des objets d'intérêt qui pourraient apparaître dans l'image. A travers l'exemple concret d'images cardiaques 3D+t, nous illustrons, dans ce chapitre (voir également [92, 118, 20]), comment bâtir une telle procédure automatique à l'aide de l'approche morphologique reposant sur la ligne de partage des eaux. Nous insistons, d'une part, sur l'intégration de connaissances a priori (modèles) pour déterminer la chaîne de traitement. D'autre part, une attention particulière est portée à la prise en compte de la dimension spatio-temporelle des séquences d'images. Enfin, la méthode proposée est validée en comparant, pour une vingtaine de patients, les résultats qu'elle produit à des segmentations tracées manuellement par deux experts cardiologues.

Des précisions supplémentaires concernant la méthode proposée et sa validation peuvent être trouvées dans la référence [92], qui est reprise dans l'Annexe D du manuscrit.

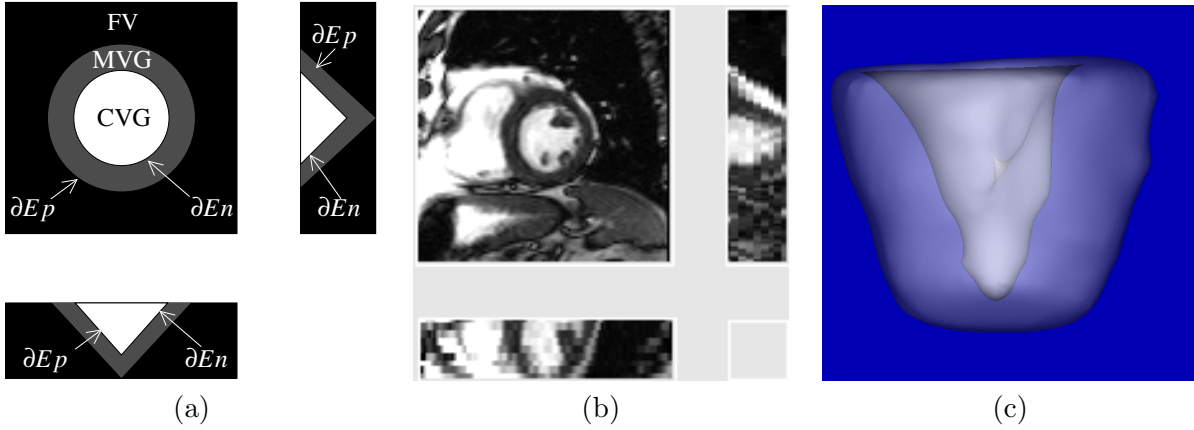


FIG. 5.1 – Objet d'intérêt en imagerie cardiaque ventriculaire gauche.

(a), Représentation schématique de trois sections orthogonales du VG ; (b), trois sections orthogonales d'une image par résonance magnétique du ventricule gauche ; et (c), un rendu surfacique en transparence.

5.2 Que segmenter ?

Dans cette section, nous identifions les objets d'intérêt qui doivent être segmentés pour répondre aux questions pratiques posées en introduction. Ce faisant, nous introduisons un ensemble de connaissances qui permettent de spécifier la chaîne d'opérateurs utilisée pour la segmentation.

5.2.1 Topologie

Le myocarde ventriculaire gauche (MVG) focalise l'attention des cardiologues car il est l'objet des pathologies les plus fréquentes et les plus graves telles que l'infarctus. Il est délimité par deux surfaces : la frontière épicaudique (∂Ep) et la frontière endocaudique (∂En). Chacune de ces surfaces partitionne l'espace tri-dimensionnel en deux objets d'intérêt connexes. Nous considérons donc (voir Figure 5.1a) : (i), la cavité ventriculaire gauche (CVG) dont le bord est ∂En et son complémentaire \overline{CVG} ; et (ii), l'union de la CVG et du MVG, dénotée CMVG, dont le bord est ∂Ep et son complémentaire appelé fond ventriculaire ($FV = \overline{CMVG}$).

5.2.2 Géométrie

Les frontières épicaudique et endocaudique peuvent être modélisées simplement par deux surfaces coniques. La frontière endocaudique est irrégulière. Elle délimite des trabéculations (repliements) ainsi que des piliers musculaires et un réseau de cordages tendineux qui permettent d'actionner les valves qui ouvrent et ferment la cavité. La frontière épicaudique est, au contraire, lisse et régulière. Ces deux frontières sont liées par des contraintes géométriques. L'épaisseur myocaudique – ou plus précisément, la distance en chaque point de ∂En à la surface ∂Ep – ne peut être prédite. Elle varie d'un patient à un autre et, de plus, pour un patient donné, elle diffère d'une zone à l'autre comme par exemple entre des zones malades et saines. Cette épaisseur est cependant bornée, et comme nous ne considérerons que des cœurs vivants, elle ne peut pas être nulle.

5.2.3 Intensité

Le MVG est perçu à travers des IRM. Dans ces images, chacun des objets d'intérêt est caractérisé par son intensité lumineuse (voir Figure 5.1b). La CVG est très claire, son niveau de gris est élevé. Le MVG, qui englobe la cavité, a une intensité significativement plus faible : ∂En , la frontière commune à ces deux objets, est donc bien contrastée. Le FV est composé de nombreux tissus. Certains d'entre eux ont des intensités caractéristiques. Par exemple, le ventricule droit et la graisse myocardique sont très clairs, les poumons, au contraire, très sombres. D'autres tissus inclus dans le FV ont des intensités comparables à celle du MVG. Le contraste le long de ∂Ep , la frontière commune à ces deux objets, est donc faible par endroits.

5.3 Comment segmenter ?

En adoptant la démarche morphologique (reconnaissance puis délinéation) présentée dans l'introduction de cette thèse, nous proposons une méthode pour segmenter automatiquement le MVG dans des séquences d'IRM. La CVG et la CMVG seront segmentées successivement par des chaînes d'opérateurs qui respectent les *a priori* discutés dans la section précédente. Une fois ces deux objets segmentés le MVG est obtenu par différence ensembliste $CMVG \setminus CVG$.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous introduisons quelques notations qui seront utilisées par la suite. On appelle l la longueur de la séquence 3D+t, c'est-à-dire le nombre d'images tridimensionnelles qui la compose. Afin de spécifier que l'on considère un objet défini dans le domaine de la t -ième image de la séquence, $t \in [1, l]$, son symbole est muni de l'indice t .

5.3.1 Frontière endocardique

La segmentation de la frontière endocardique est effectuée de manière indépendante dans chaque image 3D, notée I_t , de la séquence. L'idée est de trouver un marqueur pour la CVG, puis de dilater ce marqueur géodésiquement dans un ensemble de voxels détectés comme candidats potentiels pouvant appartenir à la CVG.

En observant attentivement la Figure 5.1b, on remarque que la CVG est composée de deux sous-ensembles : un noyau très lumineux situé en son centre, et une zone d'intensité plus faible située en bordure. Ce noyau C_t peut être approximativement segmenté, dans chaque volume V_t de la séquence 3D+t, en sélectionnant la composante connexe appropriée d'un seuil supérieur $I_t[s_1]$ de l'image I_t au niveau s_1 , *i.e.*, $I_t[s_1] = \{x \in V_t \mid I_t(x) \geq s_1\}$. Le réglage du paramètre s_1 , ainsi que celui des autres paramètres de la méthode introduits ci-après, est discuté dans la Section 5.5.4.

On suppose que les images ont été pré-traitées de telle sorte que le centre de la CVG soit localisé au centre du volume V_t . Pour cela, l'utilisateur sélectionne un unique point situé au centre de la CVG dans l'une des images 3D de la séquence. Cette étape, qui constitue la seule intervention de l'utilisateur, pourrait être automatisée grâce à des opérateurs de morphologie mathématique. Cependant, les médecins qui ont évalué la méthode préfèrent garder ce point de contrôle. Ainsi, dans chaque graphe 3D (induit par E_6 , la 6-adjacence sur \mathbb{Z}^3) associé à l'image I_t , C_t est la composante connexe de $I_t[s_1]$ qui contient le point central du volume V_t .

La zone qui borde le noyau de la CVG est légèrement plus foncée que celui-ci, mais est plus claire que le MVG. D’une part pour segmenter cette zone et d’autre part pour extraire d’éventuels points du noyau n’appartenant pas à l’ensemble issu du premier seuillage, nous considérons un second seuil supérieur $I_t[s_2]$ de I_t à un niveau $s_2 < s_1$. Puis, pour délimiter CVG_t , les ensembles C_t et $I_t[s_2]$ sont combinés par dilatation géodésique : $CVG_t = \delta_{G_6}^{r_1}(C_t, I_t[s_2])$, $r_1 \in \mathbb{Z}$. En termes de graphes, CVG_t est l’ensemble de tous les sommets liés à C_t par un chemin, dans $I_t[s_2]$, de longueur inférieure à r_1 dans le graphe G_6 induit par la 6-adjacence sur V_t .

5.3.2 Frontière épocardique

Nous décrivons ici comment extraire des images la frontière ∂Ep qui sépare la CMVG du FV. Cette segmentation est effectuée selon la démarche morphologique présentée dans l’introduction générale de la thèse. Tout d’abord, nous cherchons à reconnaître un marqueur pour chacun des deux objets d’intérêt (CMVG et FV). Pour cela, nous nous reposons sur des opérateurs morphologiques et topologiques qui permettent de garantir le respect des *a priori* présentés Section 5.2. La frontière ∂Ep est ensuite délimitée à partir de ces marqueurs. Dans cette étape, la continuité temporelle est maintenue entre les segmentations successives au cours du cycle cardiaque grâce à une LPE (Chapitre 4) calculée dans l’espace 4D (3D+t). Pour finir, les ensembles ainsi extraits sont lissés par un filtrage alterné séquentiel (FAS). Il permet, conformément aux *a priori* géométriques discutés Section 5.2, la régularisation des contours obtenus par LPE, et également la restauration d’une forme correcte aux endroits où le contraste trop faible ne permettrait pas une délimitation suffisamment précise par LPE.

Dans ce qui suit, les marqueurs de la CMVG et du FV sont respectivement appelés $mCMVG$ et mFV et les régions obtenues après LPE, $rCMVG$ et rFV .

Reconnaissance de la CMVG

Cette étape est réalisée indépendamment pour chaque image 3D. Elle consiste à déterminer, pour tout $t \in [1, l]$, l’ensemble $mCMVG_t$.

Par définition, la LPE produit une extension des marqueurs : $mCMVG_t \subseteq rCMVG_t$. Les MVG de patients vivants ne comportent pas de trous. En termes morphologiques, cela conduit à la contrainte suivante : $\Gamma_{G_6}(CVG_t) \subseteq CMVG_t$. Il faut donc imposer $\Gamma_{G_6}(CVG_t) \subseteq mCMVG_t$.

Pour extraire $mCMVG_t$, l’idée est de dilater le plus possible la CVG en s’assurant que l’ensemble obtenu soit inclus dans la CMVG réelle. Comme les ventricules traités sont potentiellement malades, il est impossible d’utiliser le même élément structurant tout autour de la cavité et pour des patients différents. Les dilatations doivent donc être adaptatives. Soit $X \subseteq V_t$, considérons la dilatation suivante pour laquelle un ensemble de contraintes $Y \subseteq V_t$ joue un rôle répulsif sur le dilaté de X :

$$\delta_{B_r}(X, Y) = \{x \in V_t \mid d(x, X) \leq d(x, [\overline{\delta_{B_{2r}}(X)}] \cup Y)\}, \quad (5.1)$$

où B_r est une boule de rayon r , où d est la distance euclidienne et où $\delta_{B_{2r}}(X)$ est la dilatation de X par une boule euclidienne de rayon $2r$. L’ensemble $\delta_{B_r}(X, Y)$ est appelé *dilatation de X par B_r repoussée par Y* . Une dilatation (euclidienne) repoussée peut être calculée grâce à un squelette par zones d’influence ([15], Chapitre 5.4.5). Un tel squelette correspond à la LPE d’une

carte de distance euclidienne [46, 52, 106].

Dans notre application, l'objectif est de trouver un ensemble de contraintes capturant des caractéristiques de forme spécifiques au cœur analysé. Des régions très claires et très foncées (correspondant au ventricule droit et aux poumons par exemple) sont situées sur le bord externe du MVG. Des marqueurs de ces zones peuvent être facilement obtenus par seuillage de l'image : $\mathcal{T}_t = \{x \in V_t \setminus \Gamma_{G_6}(CVG_t) \mid I_t(x) < s_3 \text{ ou } I_t(x) > s_4\}$, où $s_3, s_4 \in \mathbb{N}$. Grâce à l'opérateur de dilatation repoussée, le marqueur de CMVG dans la t -ième image est défini par : $mCMVG_t = \delta_{B_{r_2}}(\Gamma_{G_6}(CVG_t), \mathcal{T}_t)$, où $r_2 \in \mathbb{N}$.

Reconnaissance du FV

Afin de reconnaître le marqueur du FV dans chaque image I_t , considérons les deux a priori suivants : (a), l'épaisseur du MVG ne peut excéder un certain seuil r_3 ; et (b), l'ensemble \mathcal{T}_t est contenu avec certitude dans FV_t . D'après (a), les voxels qui sont plus éloignés de CVG_t qu'une distance égale à r_3 doivent appartenir au FV et donc à mFV_t . Notons $CVG_t^{r_3}$ cet ensemble. Conformément à la contrainte (b), \mathcal{T}_t doit également être inclus dans mFV_t . Pour satisfaire ces deux contraintes, le plus immédiat est de considérer l'union $CVG_t^{r_3} \cup \mathcal{T}_t$. Cet ensemble n'est pas nécessairement connexe ; l'utiliser comme marqueur de la LPE pourrait conduire à des configurations topologiques contraires aux a priori énoncés Section 5.2. En particulier, rFV_t pourrait contenir plusieurs composantes connexes.

Pour surmonter ce problème, les *transformations homotopiques* constituent un outil puissant [36, 47, 85]. Elles permettent de dériver un ensemble d'un autre en préservant la topologie. De plus, des contraintes géométriques peuvent y être intégrées en imposant l'inclusion d'un ensemble auxiliaire dans le résultat. Le FV possède une unique cavité : il s'agit de CMVG. L'ensemble $mCMVG_t$ est, par construction, connexe. De plus, il est nécessairement inclus dans la $CMVG_t$. Le complémentaire de ce marqueur ($\overline{mCMVG_t}$) a donc la topologie souhaitée pour FV_t . Ainsi, mFV_t peut être dérivé à partir de $mCMVG_t$ par *rétraction homotopique*. L'idée est donc de "réduire" l'ensemble $\overline{mCMVG_t}$ en préservant sa topologie et en respectant les contraintes (a) et (b).

Pour atteindre cet objectif, nous utilisons un *squelette homotopique ultime contraint* [85]. Un squelette homotopique d'un ensemble X contraint par un ensemble C a la même topologie que X , contient C et ne peut pas être réduit (par enlèvement de point) en préservant ces deux invariants. Ainsi, nous calculons mFV_t , le marqueur du fond ventriculaire gauche comme le squelette ultime de $\overline{mCMVG_t}$ contraint par $[\mathcal{T}_t \cup CVG_t^{r_3}]$.

Délinéation (LPE)

Afin de prendre en compte la consistance temporelle dans le processus de délinéation, nous considérons le graphe 4D correspondant à la séquence d'images 3D+t. Le voisinage de chaque voxel est composé de ses 6 voisins dans l'espace 3D, du voxel qui le précède et de celui qui le suit dans la séquence temporelle. Chaque arête de ce graphe est évaluée par la différence d'intensité des deux voxels qui la composent. La LPE est calculée sur les arêtes de ce graphe 4D (Chapitre 4, Section 4.8.2) à partir des marqueurs correspondant à l'union des $mCMVG_t$ et mFV_t au cours du temps. Nous pouvons remarquer que la valuation des arêtes reliant deux voxels appartenant à deux images successives correspond à un gradient temporel. C'est la prise en compte de cette

composante temporelle qui permet de maintenir une cohérence géométrique entre les segmentations successives au cours du cycle cardiaque. Dans la Section 5.5.3, nous proposons une mesure qui permet de quantifier l’apport de la LPE 4D par rapport à une procédure qui appliquerait indépendamment une LPE 3D à chaque volume tridimensionnel.

Lissage (FAS)

Afin de lisser la frontière épicaudique et de restaurer une forme satisfaisante aux endroits où l’information de contraste ne permet pas une délinéation correcte par LPE, nous utilisons des filtres de formes issus du cadre de la morphologie mathématique.

Un *filtre alterné séquentiel (FAS)* est une séquence d’ouvertures et de fermetures par des boules de taille croissante. Une *ouverture d’un ensemble X par une boule de rayon r* est l’union de toutes les boules de rayons r qui sont incluses dans X . La *fermeture* de X peut être définie par dualité comme le complémentaire de l’ouverture de \overline{X} . Ainsi, un filtre alterné séquentiel lisse un objet et son complémentaire de manière équilibrée en préservant les “boules les plus significatives” aussi bien de l’objet que de son complémentaire.

La frontière épicaudique peut être approximativement modélisée par la surface d’un cône. Chaque section (perpendiculaire à la hauteur) d’un cône est un disque. Des filtres alternés séquentiels par des disques 2D sont donc adaptés au lissage des objets obtenus par LPE :

$$CMVG_t = \left[\bigcup_{z \in [1, h]} FAS_{r_4}^{r_5}(rCMVG_{t,z}) \right] \bigcup \Gamma_{G_6}(CVG_t) \quad (5.2)$$

où h est le nombre de sections 2D d’un volume 3D, où $rCMVG_{t,z}$ désigne la section 2D de $rCMVG_t$ d’abscisse z et où $r_4, r_5 \in \mathbb{N}$ sont respectivement les diamètres minimaux et maximaux des disques utilisés pour les filtres alternés.

5.4 Données expérimentales

Cette section décrit les données expérimentales rassemblées pour valider la méthode de segmentation proposée ci-dessus. En particulier, nous décrivons le processus d’acquisition des images (18 patients), l’obtention de segmentations manuelles – réalisées par deux cardiologues – associées aux images et le réglage des paramètres de la méthode automatique.

L’ensemble des données telles que décrites ci-dessous est disponible gratuitement sur internet. L’adresse web de cette base de données est : <http://laurentnajman.org/heart>. Des précisions supplémentaires quant à la constitution de cette base sont présentées dans la référence [86].

5.4.1 Images

La base de données d’images est constituée d’acquisitions par résonance magnétique provenant de dix-huit patients, admis au CHU Henri Mondor de Créteil suite à un infarctus du ventricule gauche.

Pour chaque patient de la base, une séquence 3D+t est disponible. Elle est formée d’un ensemble de séquences 2D+t, spatialement contiguës, qui permettent d’imager la totalité du VG.

Ces séquences sont acquises perpendiculairement au grand-axe du cœur par ciné-IRM. La coupe la plus basale incluse dans l'analyse est située juste en-dessous de la valve mitrale, à l'intérieur du VG. Pour être incluse, le myocarde basal doit être visible sur toute sa circonférence en fin de systole (relaxation maximale du MVG). A l'opposé, la coupe la plus apicale est celle qui contient la plus petite CVG en fin de systole. Ces séquences 2D+t sont recalées sur l'électro-cardiogramme du patient, c'est à dire que pour chaque séquence la t-ième image correspond toujours au même instant du cycle cardiaque. Ainsi, les séquences 2D+t peuvent être empilées pour former une séquences 3D+t. Le nombre de volumes 3D durant le cycle cardiaque varie de 22 à 25, en fonction de la fréquence des battements cardiaques. Typiquement, la résolution spatiale de chaque volume est de $1,7 \times 1,7 \times 6 \text{ mm}^3$. Avant d'appliquer la procédure de segmentation automatique, les images sont sur-échantillonnées de manière à produire des voxels isotropiques. De plus, lorsqu'un décalage entre deux coupes successives (dans l'espace) est observé, un algorithme de recalage (uniquement en translation) est appliqué dans une étape préliminaire. Pour plus de précisions sur l'acquisition de ces séquences 3D+t, on pourra se référer à [92] ou consulter la référence [86] dédiée à la constitution de la base de donnée d'images cardiaques, utilisées pour cette expérimentation.

5.4.2 Segmentations manuelles

Pour chaque séquence 3D+t, une segmentation manuelle du MVG est effectuée par deux experts cardiologues indépendamment, permettant ainsi de disposer, pour chaque patient, de deux vérités-terrain. Ces deux experts sont désignés par e_1 et e_2 dans la suite du chapitre. Les ciné-IRM sont analysées comme une suite de coupes 2D petit-axe du VG. Sur chaque coupe, les experts tracent manuellement les contours endocardiques et épicaudiques en fin de diastole et fin de systole. Ensuite, les différentes coupes segmentées sont empilées de manière à former une représentation tridimensionnelle du MVG, pouvant être utilisée à des fins de quantification.

Le temps pris par chacun des experts pour segmenter un volume 3D varie de 15 à 20 minutes. Pour cette raison une segmentation manuelle n'est pas disponible pour chaque volume de la séquence 3D+t, mais uniquement pour les volumes télé-diastolique (relaxation maximale du MVG) et télé-systolique (contraction maximale du MVG).

5.4.3 Segmentations automatiques

Après avoir estimé ses paramètres comme décrit ci-dessous, la méthode automatique est appliquée sur chacune des 18 séquences spatio-temporelles. La Figure 5.2 présente un exemple de segmentation ainsi obtenue.

La méthode proposée comprend deux séries de paramètres. La première correspond aux paramètres liés à la géométrie du VG. Ils peuvent être exprimés par des mesures de distances : les valeurs utilisées pour r_1, r_2, r_3, r_4 et r_5 sont respectivement 9, 5, 25, 7 et 12 mm. Ces paramètres ne sont ni spécifiques au patient imagé, ni spécifique au capteur d'IRM utilisé. D'autre part, la méthode comprend une seconde série de paramètres dont les valeurs sont liées à l'intensité des différents tissus dans les images : les valeurs utilisées pour s_1, s_2, s_3 et s_4 sont respectivement 170, 105, 20, 170. Ces paramètres ne sont pas spécifique au patient imagé mais dépendent, en revanche, du capteur d'IRM utilisé.

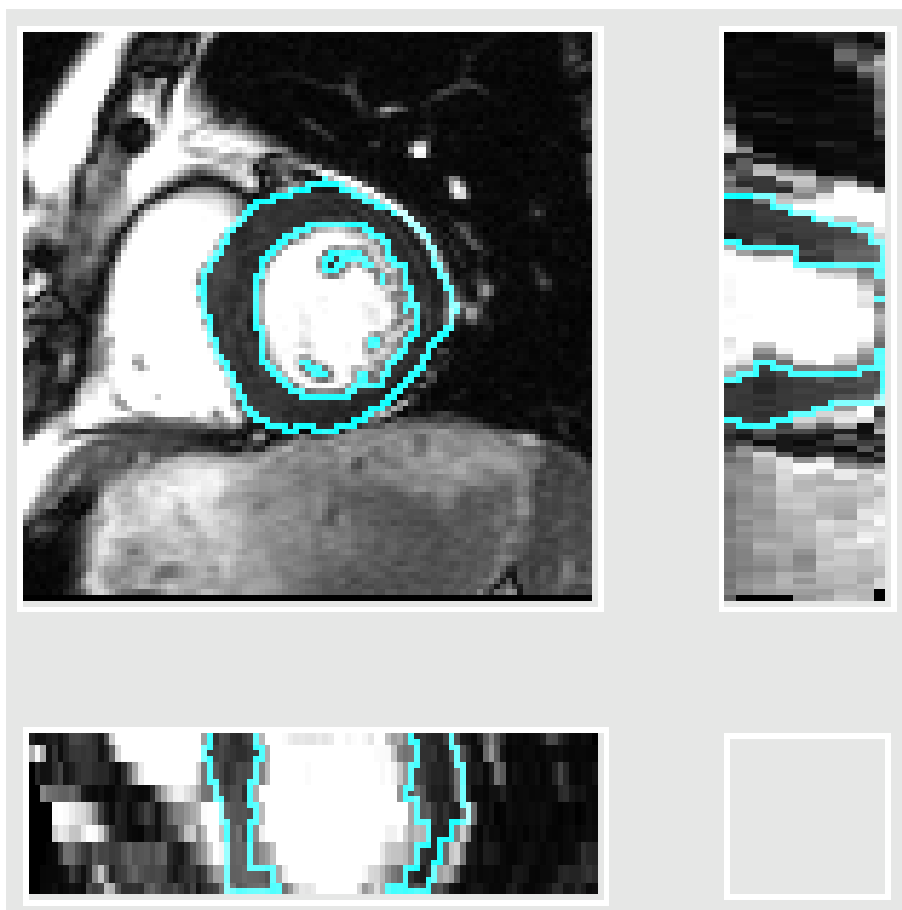


FIG. 5.2 – Exemple de segmentation obtenue par la méthode automatique.
Trois sections orthogonales d'un volume d'une image 4D sur lesquelles le bord interne du MVG segmenté automatiquement est superposé.

Chacun de ces paramètres a été réglé, indépendamment des autres, par l'un des deux cardiologues à partir de trois séquences d'images 3D+t. Plus de détails sur la procédure utilisée pour déterminer ces différentes valeurs peuvent être trouvés dans la référence [92]. Le temps nécessaires pour obtenir des valeurs satisfaisantes est d'environ 4 heures. Nous rappelons que si la méthode était utilisée sur des images provenant d'un autre capteur IRM, seuls les paramètres liés à l'intensité des tissus dans les images devraient être estimés de nouveau. D'après notre expérience, cela nécessiterait environ une heure de travail.

5.5 Résultats expérimentaux

En nous appuyant sur les données décrites dans la section précédente, nous proposons ici une validation de la méthode de segmentation. Nous démontrons, en particulier, la précision des segmentations automatiques et l'utilité de la méthode proposée pour produire des mesures de la fonction ventriculaire gauche telles qu'utilisées en routine clinique. De plus, nous analysons l'intérêt de la méthode de LPE en 4D pour maintenir la cohérence temporelle entre les segmentations successives au cours du temps. Finalement, nous présentons quelques résultats indiquant la robustesse de la méthode vis-à-vis de ses paramètres.

La plupart des scripts utilisés pour obtenir les mesures présentées ci-dessous sont disponibles sur le site internet de la base de données (<http://laurentnajman.org/heart>).

5.5.1 Précision des contours

Étant données deux surfaces ∂X and ∂Y , représentées chacune par un ensemble de polygones, la *mesure point-surface* ($P2S$) entre ∂X et ∂Y exprime la distance moyenne entre les sommets de ∂X et la surface ∂Y (voir [107]). Une mesure symétrique du P2S peut être dérivée en prenant le maximum du P2S entre ∂X et ∂Y et le P2S entre ∂Y et ∂X .

Les mesures (symétriques) de P2S obtenues par d'autres groupes travaillant sur la segmentation d'images cardiaques à partir d'autres données IRM sont présentées dans le Tableau. 5.1a.

Dans notre base de données, les surfaces (∂En et ∂Ep) sont extraites à partir des segmentations grâce à l'algorithme des cubes balladeurs (*marching cubes*, en anglais) [109]. Les mesures de P2S sont ensuite calculées entre les surfaces obtenues par la méthode automatique et celles obtenues manuellement par les deux experts. Afin d'évaluer la variabilité inter-observateur, les mesures de P2S entre les surfaces obtenues par les deux experts sont également calculées. Le Tableau. 5.1b présente la moyenne et l'écart type de ces mesures en fin de diastole et fin de systole. Dans ce tableau, MA désigne la méthode automatique. Cette dernière atteint un P2S moyen de $1.42\text{mm} \pm 0.36$ pour la frontière endocardique et un P2S moyen de $1.55\text{mm} \pm 0.23$ pour la frontière épicaudique. Ces résultats se comparent favorablement aux résultats des autres équipes sur leur propre base de données (voir Tableau. 5.1a). De plus, les valeurs des mesures de P2S entre les segmentations manuelles et automatiques sont proches des mesures inter-experts. Il s'agit d'une indication forte montrant que la méthode automatique produit des résultats aussi satisfaisants que la méthode manuelle.

Bien que la précision des segmentations automatiques soit éprouvée par les expériences présentées ci-dessus, les mesures de P2S ne permettent pas de décrire précisément la qualité des segmentations produites. En particulier, l'importance relative des erreurs de segmentation

TAB. 5.1 – Mesures de précision des segmentations manuelles et automatiques
 (a), Mesures P2S de différentes méthodes de segmentation cardiaque. (b), Détail des mesures
 obtenues par la méthode automatique proposée dans ce chapitre.

	∂En	∂Ep		AM vs. e_1	AM vs. e_2	e_1 vs. e_2
[69]	2.01 ± 0.31	2.77 ± 0.49	télé-diastole			
[63]	2.75 ± 0.86	2.63 ± 0.76	∂En	1.48 ± 0.34	1.59 ± 0.44	1.29 ± 0.36
[70]	2.28 ± 0.93	2.62 ± 0.75	∂Ep	1.81 ± 0.26	1.43 ± 0.24	1.14 ± 0.16
[80]	1.88 ± 2.00	2.75 ± 2.62	télé-systole			
[81]	1.97 ± 0.54	2.23 ± 0.46	∂En	1.44 ± 0.38	1.22 ± 0.24	1.07 ± 0.17
notre méthode	1.42 ± 0.36	1.55 ± 0.23	∂Ep	1.57 ± 0.24	1.42 ± 0.19	1.12 ± 0.15

(a)

(b)

– un paramètre qui devient crucial lorsque l’on souhaite quantifier le volume des différents objets d’intérêt – n’est pas exprimée par les mesures de P2S. Afin d’obtenir une caractérisation plus fine des segmentations automatiques, nous avons également utilisé les mesures de faux-négatifs et faux-positifs telles que proposées par J.K Udupa *et al.* [82]. Les résultats [92] obtenus montrent, d’une part, une tendance de la méthode automatique à sous-estimer le volume de la CVG et de la CMVG. D’autre part, ils signalent une variabilité inter-expert relativement élevée. D’après une validation qualitative menée par les deux experts cardiologues (voir, la discussion sur ce point dans [92]), cette sous-estimation des différents volumes peut être perçue comme un effet de bord de la procédure de segmentation manuelle. La variabilité inter-expert peut être, en partie, expliquée par le manque d’une procédure standardisée pour la segmentation manuelle du VG.

5.5.2 Paramètres critiques du diagnostic cardiaque

La fraction d’éjection ventriculaire gauche (FE) et la masse myocardique du VG (MM) sont considérées par les médecins comme des paramètres critiques du diagnostic cardiaque. Leur estimation est utilisée en routine clinique. La FE est la quantité de sang éjecté au cours du cycle cardiaque exprimée sous la forme d’une fraction du volume télé-systolique. Dans notre base de données la FE varie de 18 à 75% et la MM de 92 à 197 g.

A partir des segmentations, la FE peut être simplement calculée : $FE = (|CVG_{\max}| - |CVG_{\min}|) / |CVG_{\max}|$ où $|CVG_{\max}|$ (resp. $|CVG_{\min}|$) est le volume maximal (resp. minimal) de la cavité ventriculaire au cours du cycle. Soit X_p^o la mesure du paramètre X par l’opérateur o pour le patient p , où $X \in \{FE, MM\}$, $o \in \{e_1, e_2, AM\}$, and $p \in [1, 18]$. Nous posons $refX_p = (X_p^{e_1} + X_p^{e_2})/2$ comme valeur de référence du paramètre X pour le patient p et évaluons la déviation $\Delta X_p^o = |X_p^o - refX_p| / refX_p$. Nous remarquons que $\Delta X_p^{e_1} = \Delta X_p^{e_2}$.

Sur l’ensemble des 18 patients, la déviation moyenne de la FE, pour la méthode automatique, est égale à 0.045 alors qu’elle vaut 0.040 pour les experts. La déviation moyenne de la MM est égale à 0.069 pour la méthode automatique et 0.059 pour les experts. De plus, pour chacune de ces mesures, la déviation de la méthode automatique est inférieure à celle de la méthode manuelle pour exactement la moitié des 18 patients analysés. Nous en concluons que la méthode automatique permet d’obtenir des paramètres fiables de la fonction ventriculaire gauche, comparables à ceux produits manuellement par les experts.

Des résultats statistiques supplémentaires (incluant notamment courbes de corrélation et

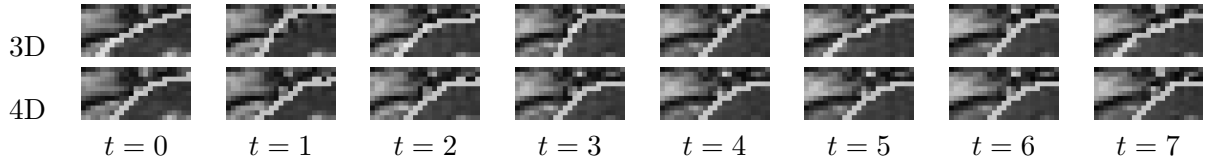


FIG. 5.3 – Illustration de la cohérence temporelle obtenue par la méthode 4D. Première ligne : détail d’une segmentation obtenue en utilisant une LPE 3D par volume 3D : le contour oscille au cours du temps. Deuxième ligne : détail d’une segmentation par LPE 4D : le contour évolue régulièrement au cours du temps.

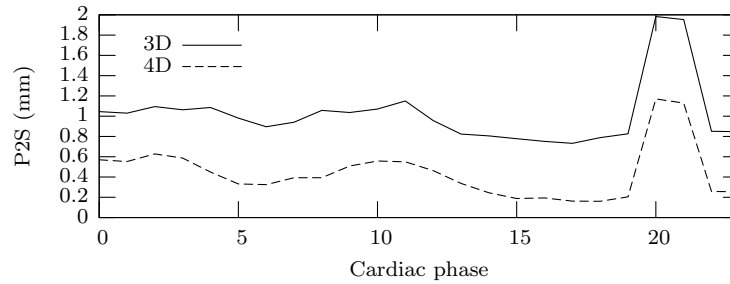


FIG. 5.4 – Mesures de la cohérence temporelle pour les variantes 3D et 4D. Moyenne, pour les dix huit patients, des mesures de P2S entre les surfaces épicaudiques successives au cours du cycle cardiaque.

diagrammes de Bland-Altman) liés aux mesures de FE et MM sont disponibles sur le site internet de la base de données.

5.5.3 Cohérence temporelle

La méthode de segmentation automatique a été testée en utilisant la procédure de LPE 4D décrite Section 5.3.2 et également en utilisant une procédure reposant sur des LPE 3D (une par volume V_t). Par rapport aux segmentations manuelles, la précision – P2S entre segmentations manuelles et automatiques – des deux variantes est approximativement la même. Cependant, il est visible à l’écran (voir par exemple Figure 5.3) que contrairement à la variante 3D, la méthode en 4D permet le maintien de la cohérence temporelle entre les différentes segmentations au cours du cycle cardiaque. Afin d’évaluer l’apport de la LPE 4D, nous calculons, pour chacune des deux variantes, le P2S entre chaque paire de surfaces épicaudiques successives. Les moyennes de ces mesures pour les dix-huit patients sont présentées en fonction du temps Figure 5.4. Nous observons que les deux courbes ont la même forme mais qu’il existe une différence constante entre elles, la courbe correspondant à la méthode 4D étant en-dessous de celle correspondant à la méthode 3D. Cela confirme donc l’impression visuelle que les segmentations obtenues par la méthode 4D sont plus régulières au cours du temps.

La segmentation de la frontière endocardique est effectuée indépendamment sur chaque volume 3D de la séquence. Néanmoins, nous n’avons pas remarqué de problèmes de régularité dans les frontières obtenues et c’est pourquoi nous n’avons pas développé une approche 4D pour segmenter la CVG.

5.5.4 Robustesse

Les valeurs s_1 et s_2 des deux seuils utilisés dans la procédure de segmentation de la frontière endocardique peuvent apparaître comme les paramètres les plus sensibles de la méthode automatique. L'étude de robustesse menée dans [92] montre qu'en fait la méthode est relativement peu sensible aux réglages de ces paramètres. En particulier, une variation conjointe de 20 et 30% pour s_1 et s_2 par rapport aux valeurs idéales engendrent un déplacement moyen (sur 18 images 3D+t) de 3.5 mm par rapport à la position des contours ∂En obtenus manuellement. Un tel déplacement correspond à environ 5% du grand axe du ventricule gauche. Ce résultat constitue une bonne indication de la robustesse de la méthode vis-à-vis de s_1 et s_2 . D'autre part, la robustesse de la méthode vis-à-vis des autres paramètres a été vérifiée de manière qualitative durant les expérimentations.

5.6 Conclusions

En nous appuyant sur la définition et les algorithmes de LPE décrits dans le Chapitre 4, nous avons proposé une procédure automatique pour la segmentation du myocarde ventriculaire gauche dans des IRM de type ciné. La méthode a été validée cliniquement. Nous avons montré la précision des résultats produits en les comparant avec des segmentations manuelles tracées par deux cardiologues. A partir des segmentations, les fractions d'éjection et masses ventriculaires gauches, deux paramètres critiques du diagnostic clinique, peuvent être dérivées. La comparaison entre les mesures provenant des analyses manuelles et automatiques a révélé la concordance entre les deux méthodes. Finalement, nous avons présenté une analyse indiquant que la LPE appliquée globalement à l'espace 4D spatio-temporel permet de maintenir une certaine régularité entre les segmentations spatiales successives.

La segmentation d'images cardiaques n'est pas un domaine réservé de la morphologie [48, 53, 63, 70, 69, 81, 80, 74]. Cependant, grâce à des fondements théoriques solides, la morphologie fournit des opérateurs robustes et rapides. A notre connaissance, l'approche morphologique proposée est la plus rapide (environ 3 min sur un PC équipé d'un processeur Pentium 4, 3.06 GHz, 512 MB). Elle peut donc être considérée comme une alternative intéressante aux méthodes reposant sur des modèles déformables qui sont plus populaires dans la communauté de l'analyse des images cardiaques.

Pour conclure

En guise de conclusion nous présentons un résumé étendu des contributions de cette thèse et proposons quelques pistes de recherche, en cours ou à venir, qui mettent en perspective les travaux présentés dans ce manuscrit.

1 Résumé des contributions

1.1 Classification de quelques approches discrètes de ligne de partage de eaux

Après avoir rappelé les définitions nécessaires pour appréhender la notion de connexité dans les graphes, le premier chapitre de cette thèse présente quatre approches de la ligne de partage des eaux qui sont parmi les plus populaires dans la communauté de l'analyse d'images : la ligne de partage des eaux par inondation, la ligne de partage des eaux topographique, la ligne de partage des eaux inter-pixel (par inondation) et la ligne de partage des eaux topologiques. Chacune d'entre elles cherche à vérifier une propriété ou une autre dérivée de l'idée intuitive d'une ligne de partage des eaux d'un relief topographique. Nous classifions chacune de ces quatre méthodes en fonction d'une liste de cinq propriétés qui correspondent à l'une ou l'autre des ces méthodes. Aucune d'entre elles ne satisfait l'ensemble de ces cinq propriétés. Cela pose donc la problématique de la thèse : l'existence d'une notion de ligne de partage des eaux vérifiant cet ensemble de cinq propriétés.

1.2 Graphes de fusion : clivages et propriétés de la fusion de régions

Les méthodes de fusion de régions utilisées en analyse d'images consistent à améliorer une segmentation initiale en fusionnant des paires de régions voisines. Nous considérons une segmentation comme un ensemble de régions connexes séparées par une frontière. Si l'ensemble frontière ne peut pas être réduit sans fusionner deux régions, nous disons alors qu'il s'agit d'un clivage.

Dans un cadre général de graphes, certaines configurations de points ne permettent pas de fusionner deux et uniquement deux régions. Nous définissons quatre classes de graphes de fusion dans lesquels les situations problématiques sont peu à peu supprimées. L'un des résultats principaux est que l'une de ces classes est celle dans laquelle tout clivage est mince. Nous donnons des caractérisations locales de deux de ces classes de graphes et prouvons que les deux autres ne peuvent pas être caractérisées localement.

Aucune des relations d'adjacence usuelles employées pour analyser des images bidimensionnelles et tridimensionnelles ne vérifie des propriétés de fusion satisfaisantes (voir, par exemple, Figure 5c).

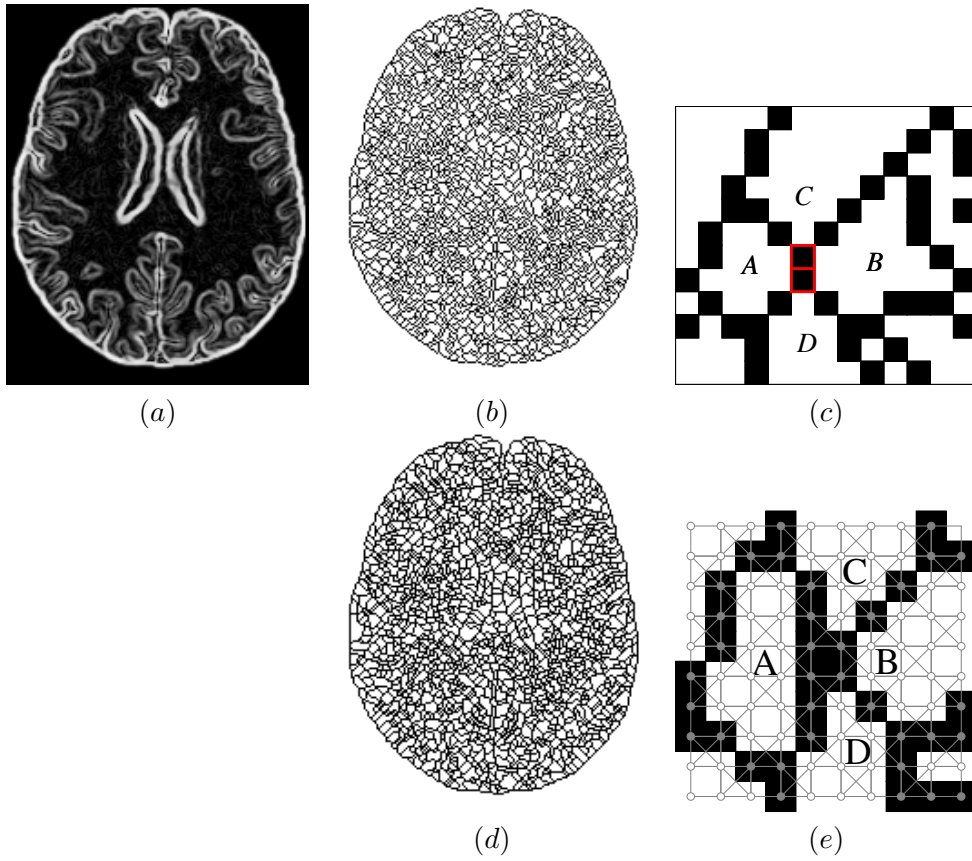


FIG. 5 – Fusion de régions.

(a) : Image originale (coupe d'une image de cerveau après application d'un opérateur de gradient). (b) : Clivage déduit de (a) équipée de la relation de 8-adjacence (en noir). (c) : Un zoom sur une partie de (b); les régions A et B ne peuvent pas être fusionnées sans fusionner en même temps une autre région (soit C soit D). (d) : Clivage déduit de (a) dans une grille de fusion parfaite. (e) : Zoom sur une partie de (d) où la grille de fusion parfaite est superposée en gris; toute paire de régions voisines peut être fusionnée en supprimant les pixels noirs adjacents aux deux régions.

Nous introduisons la grille de fusion parfaite pour \mathbb{Z}^n , c'est à dire pour les images digitales de dimension quelconque. Il s'agit d'un graphe régulier dans lequel deux régions voisines peuvent toujours être fusionnées en supprimant de l'ensemble frontière les points adjacents aux deux régions (voir, par exemple Figure 5e).

1.3 Graphes de fusion : lignes de partage des eaux et fusion de régions

Nous étendons les propriétés des graphes de fusion aux cas des graphes à sommets valués. Une fonction de valuation peut être considérée comme un empilement d'ensembles de sommets du graphe. Grâce à cette interprétation, les ligne de partage des eaux topologiques sont définies comme l'extension naturelle des clivages ensemblistes aux cas de fonctions numériques. En fait, cela fournit une définition en termes rigoureux de la notion de ligne de partage des eaux d'un graphe à sommets valués et permet de prouver des propriétés importantes qui ne sont pas garanties par la plupart des algorithmes de ligne de partage des eaux.

Nous étendons la notion de minceur ensembliste aux fonctions numériques et étudions la classe des graphes dans lesquelles toute ligne de partage des eaux topologique est une fonction mince. Nous exhibons une caractérisation de cette classe et montrons les liens forts entre minceur des lignes de partage des eaux topologiques et les classes de graphes de fusion.

En particulier, nous étudions les lignes de partage des eaux dans les graphes de fusion parfaits. Nous proposons un algorithme d'immersion monotone et démontrons sa justesse. Ce résultat est surprenant car, dans le cas général, un tel algorithme n'existe pas. L'avantage principal est de réduire à un temps linéaire la complexité pour calculer des séparations correspondant à des lignes de partages des eaux topologiques.

Contrairement au cas général, dans ce cadre de travail, les séparations obtenues par ligne de partage des eaux topologiques sont toujours des clivages minces (voir l'illustration Figure 6). Les graphes de fusion parfaits sont donc parfaitement adaptés pour les procédures de fusion de régions utilisant une ligne de partage des eaux comme segmentation initiale.

Grâce à la notion de graphe d'arêtes, un concept classique en théorie des graphes, nous montrons que les propriétés démontrées pour les graphes de fusion parfaits sont également vérifiées dans les graphes à arêtes valuées. Ce dernier résultat nous invite ainsi à explorer en profondeur la notion de ligne de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées.

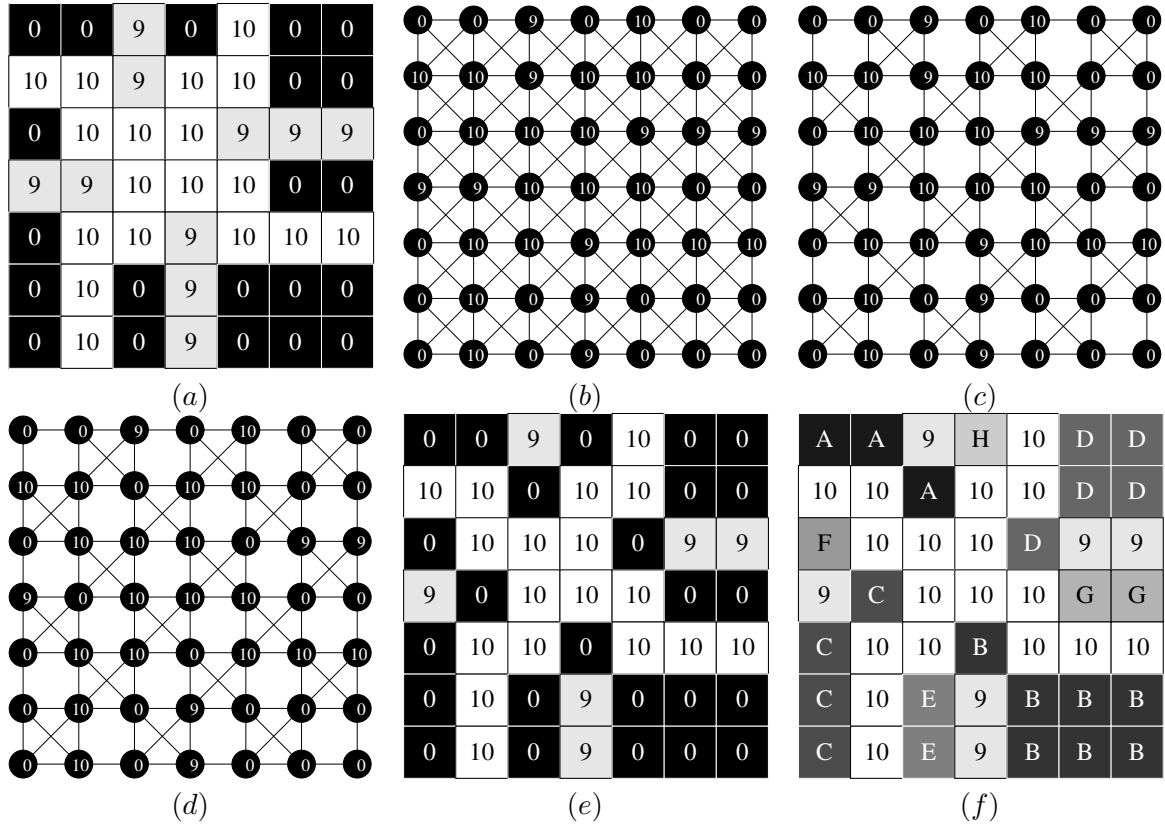


FIG. 6 – Lignes de partage des eaux topologiques épaisses et minces.

(a) : Une image. (b) : Le graphe associé à l'image (a) équipée de la 8-adjacence ; on remarque que (a) est une LPE topologique pour la 8-adjacence et que la séparation induite par (a) (sommets de valuation non nulle) est épaisse. (c) : Le graphe correspondant à l'image (a) équipée d'une grille de fusion parfaite. (d) : LPE topologique de (a) dans une grille de fusion parfaite. (e) : L'image correspondant à (d). (f) : Les régions de (d) (pixels étiquetés) et la séparation induite par (d) (pixels non étiquetés). Elle est mince et de plus, tout point lui appartenant est adjacent à exactement deux régions distinctes.

1.4 Ligne de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées

Nous étudions les lignes de partage des eaux dans les graphes à arêtes valuées. Dans ce cadre les lignes de partage des eaux sont définies en suivant l'idée intuitive de gouttes d'eau s'écoulant sur une surface topographique.

La consistance de ce cadre de travail est établie : en particulier, nous montrons que les lignes de partage des eaux peuvent y être caractérisées aussi bien par leurs bassin d'attraction (régions) à travers une *propriété de plus grande pente* que par les lignes qui les séparent (bord) à travers le *principe de la goutte d'eau*. Ensuite, nous établissons, par un théorème d'équivalence, l'optimalité (en termes de forêt couvrante de poids minimum) de ces lignes de partage des eaux. A notre connaissance, aucune des autres approches discrètes de la ligne de partage des eaux ne vérifie toutes ces propriétés.

Afin de calculer ces lignes de partage des eaux, nous introduisons une transformation d'amin-cissement qui consiste à abaisser, jusqu'à idempotence, les valeurs de certaines arêtes qui satisfont une propriété simple qui peut être testée localement. Nous montrons que cette transformation permet d'obtenir une ligne de partage des eaux et, plus remarquablement, que toute ligne de partage des eaux peut être obtenue par cette transformation. Nous dérivons deux algorithmes de calcul linéaires qui sont, à notre connaissance, les plus efficaces – aussi bien en théorie qu'en pratique – parmi les stratégies existantes de calcul de ligne de partage des eaux.

Nous étudions, à travers quelques propriétés mathématiques, les liens avec les forêts de plus courts chemins et la ligne de partage des eaux topologique.

Finalement, nous présentons quelques illustrations à la segmentation d'images conduisant à la conclusion que l'approche proposée s'avère, dans certains cas, plus précise que les approches de la ligne de partage des eaux qui reposent sur les graphes à sommets valués (voir, par exemple, Figure 7).

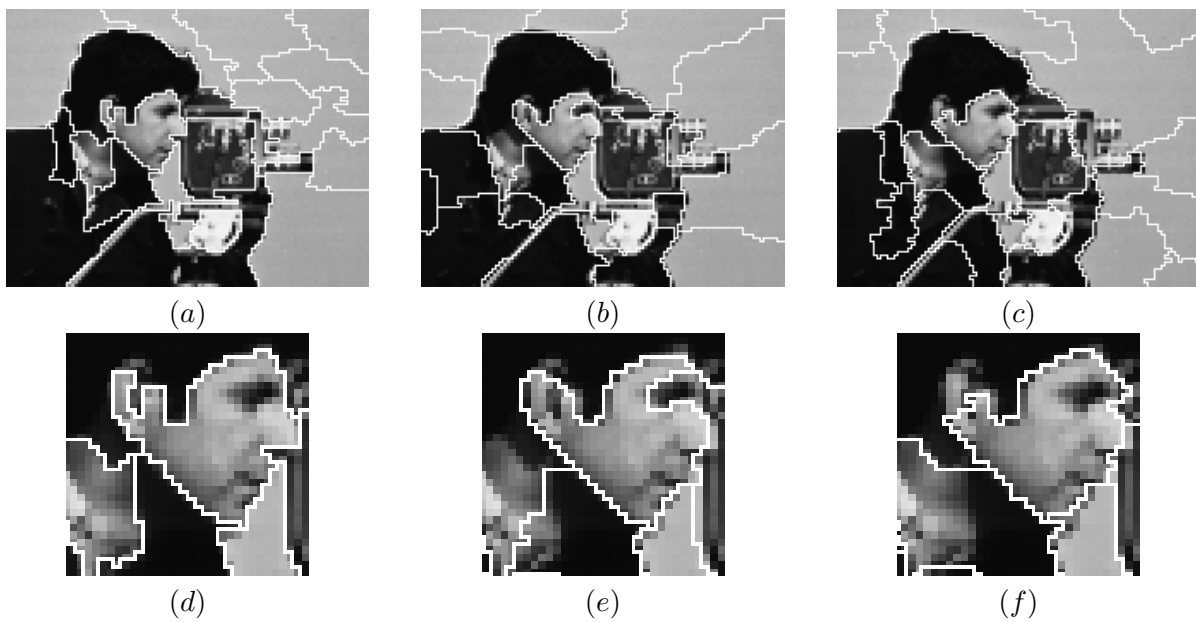


FIG. 7 – Illustration sur une image de différentes méthodes de ligne de partage des eaux.

(a, b) : Une ligne de partage des eaux dans un graphe à arêtes valuées superposée en blanc à l'image originale. (c, d) : Une ligne de partage des eaux par inondation (l'une des variantes les plus utilisées de ligne de partage des eaux) d'un gradient de Canny-Deriche. (e, f) : Une ligne de partage des eaux par inondation d'un gradient morphologique.

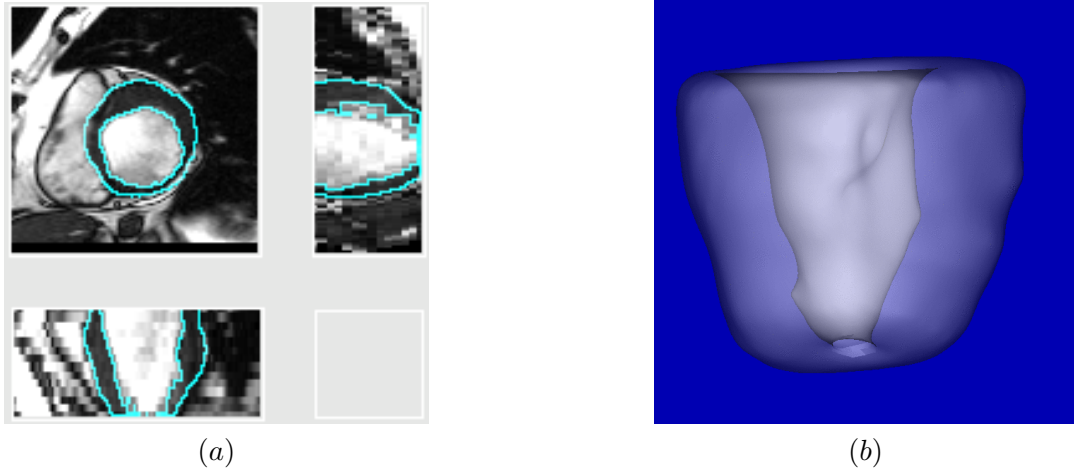


FIG. 8 – Exemple de segmentation du myocarde ventriculaire gauche.

(a) : Trois sections orthogonales d'un volume d'une image 4D auquel est superposé le bord interne du myocarde ventriculaire gauche segmenté par la méthode automatique. (b) : Un rendu surfacique de la segmentation.

1.5 Segmentation d'images cardiaques spatio-temporelles

Reposant sur la ligne de partage des eaux dans un graphe (4D) à arêtes valuées et sur des opérateurs classiques de la morphologie mathématique, nous avons développé un logiciel pour segmenter automatiquement le myocarde ventriculaire gauche dans des images 4D (3D+t) par résonance magnétique de type ciné (voir, Figure 8ab).

Grâce à la comparaison avec des segmentations manuelles effectuées par deux cardiologues, nous avons démontré la précision des contours obtenus automatiquement. Sur 18 patients la distance moyenne entre surfaces extraites automatiquement et manuellement est égale à $1.42 \pm 0.36\text{mm}$ et $1.55 \pm 0.23\text{mm}$ pour respectivement les frontières endocardiques et epicardiques. Pour chaque contour, cela correspond à un déplacement moyen inférieur à la taille d'un voxel.

La fraction d'éjection (FE) et la masse myocardique (MM), deux paramètres critiques dans les diagnostics cardiaques, peuvent être dérivées des segmentations. La pertinence des paramètres mesurés à partir des segmentations automatiques est évaluée par comparaisons avec ceux dérivés des segmentations manuelles. L'analyse statistique démontre une bonne corrélation de 0.98 et 0.99 pour respectivement la FE et la MM et une erreur systématique de $-1,4\%$ et 0% .

Pour mettre en avant le gain obtenu grâce à la méthode 4D, nous avons comparé ces résultats à une variante utilisant uniquement des lignes de partage des eaux 3D (une par image 3D). Il apparaît clairement que la procédure 4D proposée permet de maintenir une certaine cohérence temporelle entre les segmentations successives au cours du cycle cardiaque.

2 Perspectives

2.1 Arbres de poids minimum par ligne de partage des eaux

Le problème d'extraction d'un arbre de poids minimum est l'un des plus anciens et des plus étudiés en optimisation combinatoire. Dans le Chapitre 4, nous avons montré les liens entre la LPE et une famille particulière de forêt de poids minimum. Alors que dans le cas général une forêt de poids minimum, et donc également un arbre de poids minimum, ne peut pas être calculée en temps linéaire, nous avons proposé deux algorithmes linéaires pour cette famille particulière. Comment ces algorithmes peuvent-ils apporter une meilleure compréhension, voire une extraction plus efficace, des arbres de poids minimum ? Il nous semble que cette question constitue un axe de recherche intéressant pour l'avenir. Nous proposons ci-dessous quelques pistes permettant d'aborder ce sujet.

Au début du 20ème siècle, O. Boruvka [64] a proposé une procédure très simple et efficace pour détecter certaines arêtes des arbres de poids minimum. Cette procédure constitue aujourd'hui une brique importante des algorithmes les plus efficaces pour l'extraction de tels arbres optimaux [56].

Dans le cas d'un graphe dont toutes les arêtes ont un poids distinct, les arêtes détectées par Boruvka sont exactement celles considérées par nos algorithmes de LPE. Il est possible de dénombrer les arêtes détectées par les procédures de LPE et donc aussi celles considérées par Boruvka : il s'agit d'une fonction décroissante du nombre des minima de la fonction de pondération. A titre d'exemple, on peut déduire de ce dénombrement que si une fonction ne comporte qu'un seul minimum alors toutes les arêtes de l'arbre de poids minimum seront détectées par une unique itération de ces algorithmes.

Dans le cas d'un graphe dont les arêtes n'ont pas toutes un poids distinct, Boruvka se ramène au cas précédent en ordonnant arbitrairement les arêtes de même valuation. Il en résulte une nouvelle fonction, dans laquelle toutes les arêtes ont un poids distinct. En général, cette fonction comporte plus de minima que la fonction d'origine. Dans ce cas, l'algorithme de Boruvka appliquée à la fonction modifiée détecte moins d'arêtes appartenant à l'arbre de poids minimum que les algorithmes de LPE appliqués à celle d'origine. On peut dire que les algorithmes de LPE sont des "procédures de Boruvka optimales", au sens où au mieux (un réarrangement de la fonction d'origine que ne crée pas de nouveaux minima) Boruvka détecte exactement le même nombre d'arêtes que la LPE.

Dans l'avenir, nous projetons de prouver ces propriétés et ainsi de revisiter les algorithmes d'arbre de poids minimum – en remplaçant la procédure de Boruvka par des procédures type LPE – afin d'évaluer en pratique l'apport de cette alternative.

2.2 Lignes de partage des eaux dans les complexes

Une question intéressante – qui ne peut être mise de côté par un étudiant au sein du laboratoire A2SI à l'ESIEE – est celle de la structure topologique des contours produits par LPE [19]. Le cadre des complexes simpliciaux [1] ou cubiques (voir l'illustration Figure 9) semble prometteur pour répondre à cette question car il permet de retrouver une topologie au sens de P.S Alexandroff [25]. Il existe une opération simple pour mettre en correspondance les faces de dimension n et $n - 1$ d'un complexe – ou, plus précisément, d'une pseudovariété de dimension n

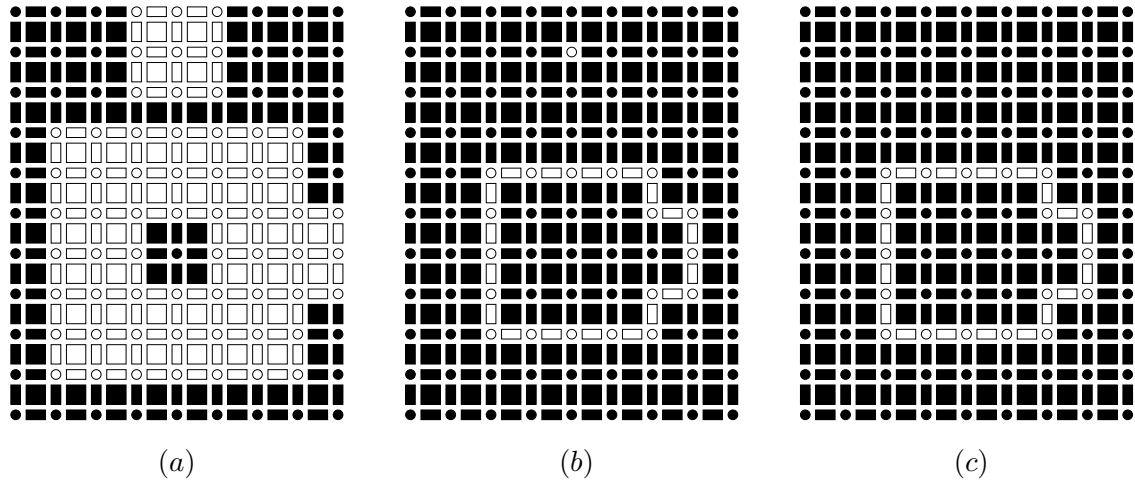


FIG. 9 – Ligne de partage des eaux dans un complexe cubique 2D.

(a), En blanc un complexe cubique X , qui est un sous-complexe des pixels de l'image. Chaque pixel est composé d'un élément de dimension 2 (carré), de quatre éléments de dimension 1 (segments) et de quatre éléments de dimension 0 (points); (b), un squelette de X ; (c), une coupure de X .

[21] – avec les sommets et arêtes d'un graphe. Cette opération permet, en particulier, d'inférer aux complexes les définitions du Chapitre 4 comme, par exemple, celle de coupure ou de LPE (voir Figure 9c). Dans ce cadre, nous avons répondu [19] ou espérons répondre aux questions suivantes :

- Dans un espace (un complexe) de dimension n , une coupure, ou en niveau de gris, une ligne de partage des eaux, est-elle nécessairement un complexe de dimension $n - 1$?
- Comment peut-on structurer une LPE pour en transformer ses caractéristiques par des opérations maîtrisées ? Est-il possible, par exemple, d'adapter les opérations de “restauration de crêtes” proposés par M. Couprie [65] et L. Brun [110] ou d'utiliser l'arbre des coupes [78] pour améliorer le contraste le long de la LPE d'une image ?
- L'opération de collapse [7, 88, 89, 114, 115] est fondamentale pour les transformations homotopiques d'objets discrets. Grâce à cette opération qui n'est pas sans rappeler l'abaissement d'arêtes de bord, peut-on établir un lien précis entre squelettes (voir Figure 9b) et LPE ?
- Comment définir proprement une notion de LPE pour segmenter une surface (voir Figure 10) représentée par exemple par un maillage composés de triangles (un complexe simplicial) ?

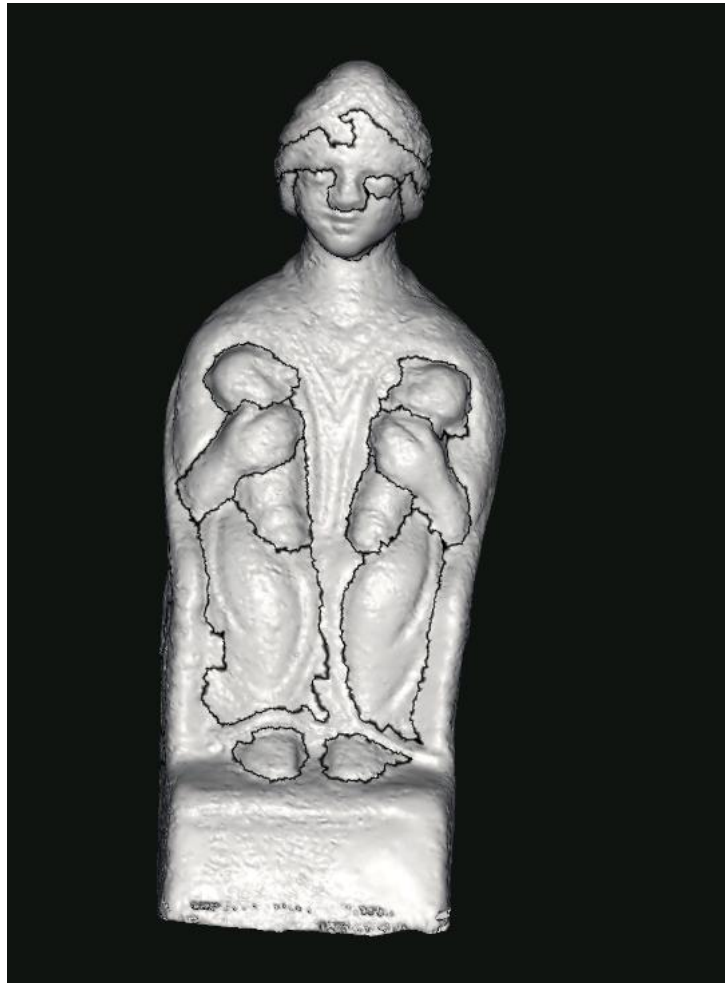


FIG. 10 – Segmentation de la surface d’une statue.

2.3 Lignes de partage des eaux hiérarchiques : saillance des contours

La saillance des contours, introduite par L. Najman [50], est un formalisme élégant pour “résumer” en une seule image tous les niveaux hiérarchiques (de fusion) qui peuvent être obtenus en filtrant une fonction par des attributs morphologiques, pour toutes les valeurs de paramètres, et en appliquant une LPE sur la fonction filtrée. Différents algorithmes [50, 102] ont été proposés pour calculer des fonctions de saillance. L’objectif est d’obtenir le même résultat en seuillant la fonction de saillance au niveau k ou en filtrant l’image par attribut avec le paramètre k et en appliquant une LPE à la fonction filtrée. Aucun des algorithmes existants ne fournit le résultat escompté. Les deux raisons principales qui expliquent l’échec de ces algorithmes sont les suivantes. D’une part, la segmentation initiale considérée doit nécessairement préserver la valeur de connexion (une notion de contraste entre régions). D’autre part, il est nécessaire de garantir que deux régions voisines puissent être fusionnées sans effet de bord induit par la fusion d’une troisième région (voir des exemples de problèmes posés par la fusion dans la Figure 5). Les notions introduites dans cette thèse permettent d’expliquer et de contourner les deux problèmes précédents en changeant de cadre de travail. Nous espérons donc pouvoir proposer et démontrer des algorithmes de saillance corrects à la fois pour les graphes de fusion parfaits (Chapitres 2 et 3) et pour les graphes à arêtes valuées (Chapitre 4). La Figure 11 montre des résultats préliminaires obtenus avec de tels algorithmes.

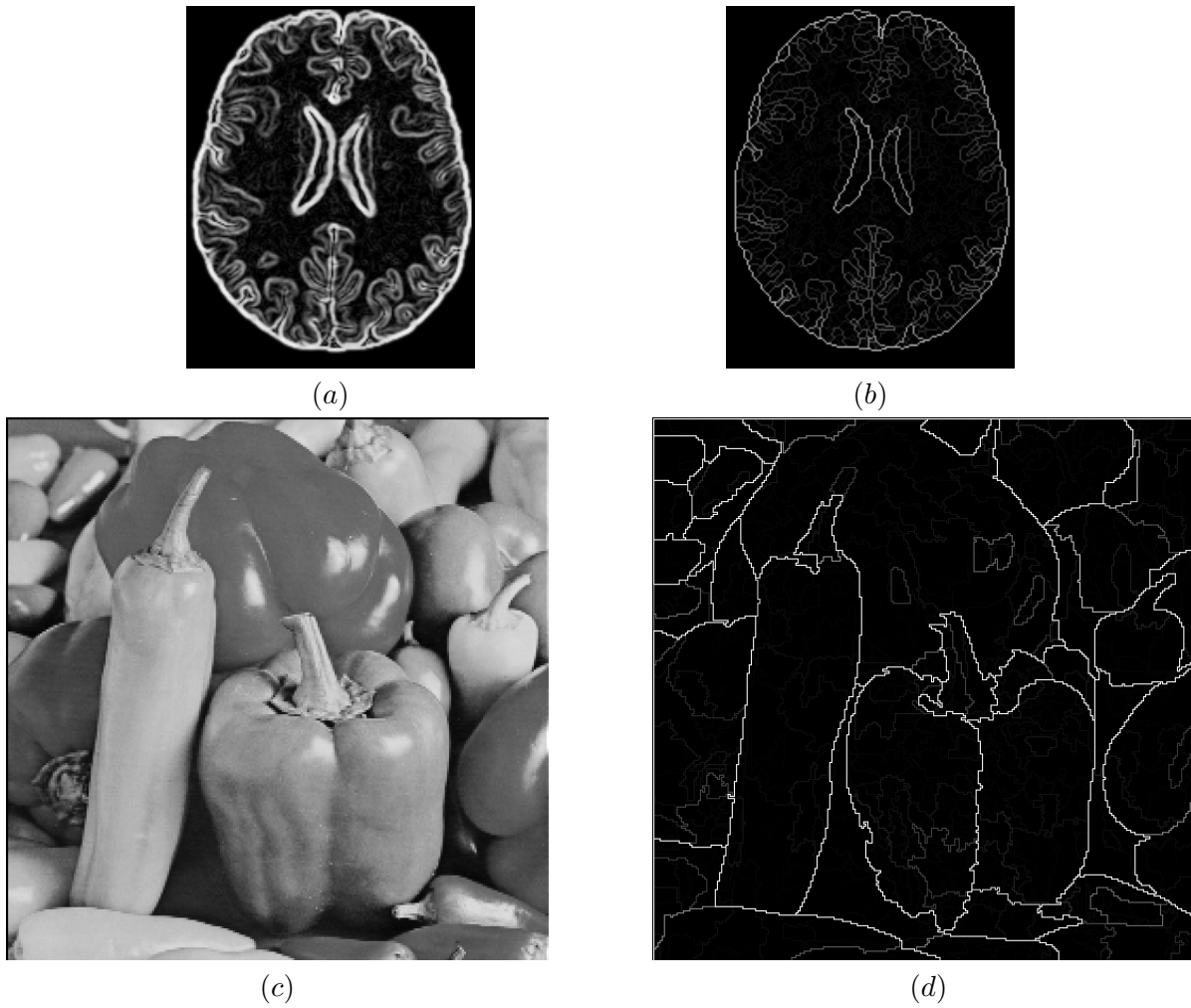


FIG. 11 – Saillance des contours.

(a), image originale; (b), saillance des contours de (a) pour un attribut de contraste (dynamique) dans une grille de fusion parfaite; différents seuils de cette image illustrent les méthodes de fusion de région dans le Chapitre 3; (c), une deuxième image; (d) saillance des contours de (c) pour un attribut de volume (combinant surface et contraste) dans un graphe à arêtes valuées.

2.4 Analyse d'images médicales

La procédure de segmentation d'IRM cardiaques spatio-temporelles décrite Chapitre 5 a été appliquée avec succès à des images provenant d'une vingtaine de patients. Afin d'utiliser cette méthode en routine clinique quelques études supplémentaires doivent être effectuées. D'une part, une validation de la méthode sur un plus large échantillon de patients est en cours de réalisation à l'Hopital Henri Mondor de Créteil. D'autre part, une étude anatomopathologique (sur les lapins et cochons) permettrait de disposer d'une vérité terrain totalement indépendante de tout appareil d'imagerie et donc validerait complètement la méthode proposée.

Après infarctus, deux types de tissus myocardiques focalisent l'attention des médecins. Le premier correspond à la zone infarctée. Il n'a aucune faculté de récupération fonctionnelle. Le second est situé autour de l'infarctus et, dans un premier temps, cesse également de fonctionner. Néanmoins, ce second type de tissus peut, après quelques mois, récupérer tout ou partie de sa fonction contractile. À terme, l'objectif des cardiologues est de pouvoir comprendre et prédire ce processus de remodelage ventriculaire. Pour cela, il faudrait être capable de fusionner deux types d'informations : la géométrie de l'infarctus et le mouvement ventriculaire. Le premier peut être déduit d'IRM 3D fixes dites de rehaussement tardif, pour lequel une méthode de segmentation à base de LPE a été proposé [108]. Le second pourrait être déduit à partir des images IRM de type ciné. La fusion de ces deux modalités constitue ainsi un thème de recherche prometteur.

La méthode proposée Chapitre 5 ne permet pas la dérivation directe de paramètres liés au mouvement myocardique. Comme mentionné ci-dessus, il serait cependant intéressant de disposer de champs de déformation (*i.e.*, mise en correspondance des voxels de l'image au temps t avec ceux de l'image au temps $t + 1$). De telles déformations pourraient être obtenues au moyen d'un modèle spatio-temporel du cœur et un tel modèle nécessite des segmentations fiables jouant le rôle de contraintes géométriques. Une perspective intéressante est ainsi d'utiliser les segmentations produites par la méthode proposée afin de contraindre un modèle du cœur donnant accès aux paramètres de mouvement.

L'orientation des fibres musculaires joue un rôle important dans la modélisation des phénomènes électro-mécaniques liés à l'activité cardiaque. L'IRM de diffusion est une modalité d'imagerie récente qui associe à chaque point de l'espace une matrice (tenseur) décrivant la diffusion locale des molécules d'eau. Ce type d'images est de plus en plus utilisé car il permet justement de déduire la direction des fibres qui composent un tissu. Malheureusement, pour l'instant, il n'est pas possible d'obtenir de telles images en cardiologie car l'organe imagé doit être immobile et le temps de pose est relativement long. Cependant, tout porte à croire, que des images de diffusion de cœur vivant seront disponibles dans un avenir proche. En morphologie mathématique, il n'existe que peu de méthodes capables de traiter ce type d'image. Une piste de recherche intéressante semble donc être l'extension d'opérateurs morphologiques, en particulier ceux proposés dans cette thèse, aux images tensorielles. Ces opérateurs pourraient, dans un premier temps, être testés sur des images de diffusion du cerveau.

Pour conclure

Annexe A

Fusion graphs : merging properties and watersheds

J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie, L. Najman.
Rapport technique Institut-Gaspard-Monge IGM 2005-04.
Soumis pour publication en revue.

Fusion graphs: merging properties and watersheds

J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie and L. Najman

*IGM, Unité Mixte de Recherche CNRS-UMLV-ESIEE UMR 8049
Laboratoire A2SI, Groupe ESIEE
Cité Descartes, BP99, 93162 Noisy-le-Grand Cedex France*

Abstract

Region merging methods consist of improving an initial segmentation by merging some pairs of neighboring regions. In this paper, we consider a segmentation as a set of connected regions, separated by a frontier. If the frontier set cannot be reduced without merging some regions then we call it a watershed. In a general graph framework, merging two regions is not straightforward. We define four classes of graphs for which we prove, thanks to the notion of watershed, that some of the difficulties for defining merging procedures are avoided. Our main result is that one of these classes is the class of graphs in which any watershed is thin. None of the usual adjacency relations on \mathbb{Z}^2 and \mathbb{Z}^3 allows a satisfying definition of merging. We introduce the perfect fusion grid on \mathbb{Z}^n , a regular graph in which merging two neighboring regions can always be performed by removing from the frontier set all the points adjacent to both regions.

Key words: Graph theory, region merging, watershed, fusion graphs, adjacency relations, connectedness, image segmentation, image processing

This article is dedicated to the memory of Azriel Rosenfeld.

Introduction

Azriel Rosenfeld, by his seminal work, has formalized and explored a number of mathematical notions which are now considered as the most fundamental ones for image analysis. In particular, he pioneered the study of connectivity in both binary and grayscale digital pictures [13,14], through the use of adjacency

Email addresses: `j.cousty@esiee.fr` (J. Cousty), `g.bertrand@esiee.fr` (G. Bertrand), `m.couprie@esiee.fr` (M. Couprie), `l.najman@esiee.fr` (L. Najman).

Preprint submitted to Elsevier Science

9 December 2005

relations (*i.e.*, graphs) defined on \mathbb{Z}^2 and \mathbb{Z}^3 . In the important and difficult task of segmenting an image, connectivity often plays an essential role: in many cases, a segmentation can be viewed as a set of connected regions, separated by a background which constitutes the frontiers between regions. A popular approach to image segmentation, called region merging [15,12], consists of progressively merging pairs of regions until a certain criterion is satisfied. The criterion which is used to identify the next pair of regions which will merge, as well as the stopping criterion are specific to each particular method.

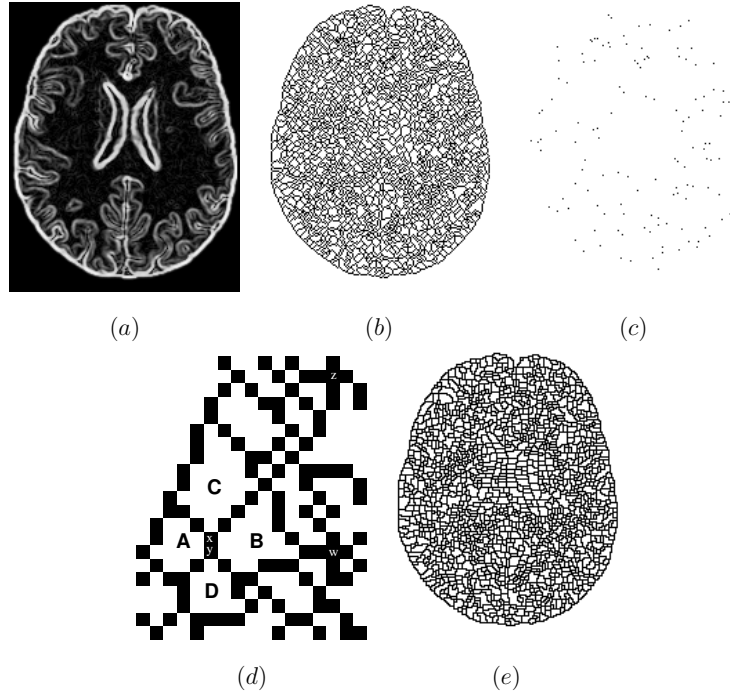


Fig. 1. (a): Original image (cross-section of a brain, after applying a gradient operator). (b): Watershed of (a) with the 4-adjacency (in black). (c): Interior points for the previous image (in black). (d): A zoom on a part of (b). The points z and w are interior points. (e): Watershed of (a) with the 8-adjacency (in black). There are no interior points.

Given a grayscale image, how is it possible to obtain an initial set of regions for a region merging process? The watershed transform [4,10] is a powerful tool for solving this problem. Let us consider a 2D grayscale image as a topographical relief, where the dark pixels correspond to basins and valleys, whereas bright pixels correspond to hills and crests. Suppose that we are interested in segmenting “dark” regions. Intuitively, the watersheds of the image are constituted by the crests which separate the basins corresponding to regional

minima (see Fig. 1a,b). Due to noise and texture, real-world images often have a huge number of regional minima, hence the “mosaic” aspect of Fig. 1b. In [5,3,6,11], the authors developed a framework based on graph theory, in which some important properties of grayscale watersheds are proved, and efficient algorithms to compute them are proposed. In the case of a graph (*e.g.*, an adjacency graph defined on a subset of \mathbb{Z}^2), a watershed may be thought of as a “separating set” of vertices which cannot be reduced without merging some connected components of its complementary set.

A first question arises when dealing with watersheds on a graph. Given a subset E of \mathbb{Z}^2 and the graph (E, Γ_1) which corresponds to the usual 4-adjacency relation, we observe that a watershed may contain some “interior points”, *i.e.*, points which are not adjacent to any point outside the watershed (see Fig. 1c,d). We can say that a watershed on Γ_1 is not necessarily thin. On the other hand, such interior points do not seem to appear in any watershed on Γ_2 , which corresponds to the 8-adjacency. Are the watersheds on Γ_2 always thin? We will prove that it is indeed true. More interestingly, we provide in this paper a framework to study the property of thinness of watersheds in any kind of graph, and we identify the class of graphs in which any watershed is necessarily thin. This result is one of the main theorems of the article (Th. 33).

Let us now turn back to the region merging problem. What happens if we want to merge a couple of neighboring regions A and B , and if each pixel adjacent to these two regions is also adjacent to a third one, which is not wanted in the merging? Fig. 1d illustrates such a situation, where x is adjacent to regions A, B, C and y to A, B, D . This problem has been identified in particular by T. Pavlidis (see [12], section 5.6: “When three regions meet”), and has been dealt with in some practical ways, but until now a systematic study of properties related to merging in graphs has not been done. A major contribution of this article is the definition and the study of four classes of graphs, with respect to the possibility of “getting stuck” in a merging process (Sec. 3, Sec. 4). In particular, we say that a graph is a *fusion graph* if any region A in this graph can always be merged with another region B , without problems with other regions. The most striking outcome of this study is that the class of fusion graphs is precisely the class of graphs in which any watershed is thin (Th. 33). We also provide some local characterizations for two of these four classes of graphs, and prove that the two other ones cannot be locally characterized (Sec. 5).

Using this framework, we analyze the status of the graphs which are the most widely used for image analysis, namely the graphs corresponding to the 4- and the 8-adjacency in \mathbb{Z}^2 and to the 6- and the 26-adjacency in \mathbb{Z}^3 (Sec. 6). In one of the classes of graphs introduced in Sec. 4, that we call the class of *perfect fusion graphs*, any pair of neighboring regions A, B can always be merged, without problems with other regions, by removing all the pixels which are

adjacent to both A and B . We show that none of these classical graphs is a perfect fusion graph. Last, but not least, in Sec. 7 we introduce a graph on \mathbb{Z}^n (for any n) that we call the perfect fusion grid, which is indeed a perfect fusion graph, and which is “between” the direct adjacency graph (which generalizes the 4-adjacency to \mathbb{Z}^n) and the indirect adjacency graph (which generalizes the 8-adjacency). Furthermore, in [7], we prove that this n -dimensional grid is the unique grid (up to a translation) that possesses those two properties.

1 Basic notions

Let E be a set, we write $X \subseteq E$ if X is a subset of E , we write $X \subset E$ if X is a proper subset of E , *i.e.*, if X is a subset of E and $X \neq E$. We denote by \bar{X} the complementary set of X in E , *i.e.*, $\bar{X} = E \setminus X$.

Let E be a finite set, we denote by $|E|$ the number of elements of E . We denote by 2^E the set composed of all the subsets of E .

We define a graph as a pair (E, Γ) where E is a finite set and Γ is a binary relation on E (*i.e.*, $\Gamma \subseteq E \times E$), which is reflexive (for all x in E , $(x, x) \in \Gamma$) and symmetric (for all x, y in E , $(y, x) \in \Gamma$ whenever $(x, y) \in \Gamma$). Each element of E is called a *vertex* or a *point*. We will also denote by Γ the map from E to 2^E such that, for all $x \in E$, $\Gamma(x) = \{y \in E \mid (x, y) \in \Gamma\}$. If $y \in \Gamma(x)$, we say that y is *adjacent to* x . We define also the map Γ^* such that for all $x \in E$, $\Gamma^*(x) = \Gamma(x) \setminus \{x\}$. Let $X \subseteq E$, we define $\Gamma(X) = \cup_{x \in X} \Gamma(x)$, and $\Gamma^*(X) = \Gamma(X) \setminus X$. If $y \in \Gamma(X)$, we say that y is *adjacent to* X . If $X, Y \subseteq E$ and $\Gamma(X) \cap Y \neq \emptyset$, we say that Y is *adjacent to* X (or that X is adjacent to Y , since Γ is symmetric). Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph and let $X \subseteq E$, we define the *subgraph of G induced by X* as the graph $G_X = (X, \Gamma \cap [X \times X])$. In this case, we also say that G_X is a *subgraph of G* . Let $G = (E, \Gamma)$ and $G' = (E', \Gamma')$ be two graphs, we say that G and G' are *isomorphic* if there exists a bijection f from E to E' such that, for all $x, y \in E$, y belongs to $\Gamma(x)$ if and only if $f(y)$ belongs to $\Gamma'(f(x))$.

Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$, a *path in X* is a sequence $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ such that $x_i \in X$, $i \in [0, l]$, and $x_i \in \Gamma(x_{i-1})$, $i \in [1, \dots, l]$. We also say that π is a *path from x_0 to x_l in X* . Let $x, y \in X$. We say that x and y are *linked for X* if there exists a path from x to y in X . We say that X is *connected* if any x and y in X are linked for X .

Let $Y \subseteq X$. We say that Y is a *connected component of X* , or simply a *component of X* , if Y is connected and if Y is maximal for this property, *i.e.*, if $Z = Y$ whenever $Y \subseteq Z \subseteq X$ and Z connected.

We denote by $\mathcal{C}(X)$ the set of all the connected components of X . Let $S \subseteq E$,

we denote by $\mathcal{C}(X|S)$ the subset of $\mathcal{C}(X)$ composed of the components of X which are adjacent to S .

Notice that the empty set is connected, and that if X is non-empty, then the empty set is not a connected component of X . Notice also that, if Y is a connected component of a set X , then Y is not adjacent to $X \setminus Y$.

Let us consider a subset X of E , and two non-empty subsets A, B of X such that $A \cup B = X$. We can easily see that, if X is connected, then A and B must be adjacent to each other. On the other hand, if X is not connected, then we have two points x and y in X which are not linked for X . Considering the set A of all the points z in X such that x and z are linked for X and considering the set $B = X \setminus A$, we see that X can be partitioned into two non-empty subsets which are not adjacent to each other. These observations lead to the following property which characterizes connected sets (without the need of considering paths).

Property 1. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$. The set X is connected if and only if, for any two distinct non-empty subsets A, B of X such that $A \cup B = X$, the subset A is adjacent to B .*

From Prop. 1 we can immediately deduce the following corollary.

Corollary 2. *Let (E, Γ) be a graph, let X be a non-empty subset of E . If E is connected and if $X \neq E$, then $\Gamma^*(X) \neq \emptyset$.*

In this paper, we study in particular some thinness properties of watersheds in graphs. The notions of thinness and interior are closely related.

Definition 3. *Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subseteq E$, the interior of X is the set $\text{int}(X) = \{x \in X \mid \Gamma(x) \subseteq X\}$. We say that the set X is thin if $\text{int}(X) = \emptyset$.*

Property 4. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$ such that $\text{int}(X) \neq \emptyset$, let A be a non-empty subset of $\text{int}(X)$. We have: $\mathcal{C}(X \setminus A) = \mathcal{C}(X) \cup \mathcal{C}(A)$. Furthermore, if A is connected, then A is a connected component of $X \setminus A$; more precisely we have $\mathcal{C}(X \setminus A) = \mathcal{C}(X) \cup \{A\}$.*

The proof of Prop. 4 is elementary and thus omitted. To conclude this section, we recall the definition of line graphs. This class of graphs allows to make a strong link between the framework developed in this paper and the approaches of watershed and region merging based on edges rather than vertices.

Definition 5. *Let (E, Γ) be a graph. The line graph of (E, Γ) is the graph (E', Γ') such that $E' = \Gamma$ and (u, v) belongs to Γ' whenever $u \in \Gamma$, $v \in \Gamma$, and u, v share a vertex of E .*

We say that a graph (E', Γ') is a line graph if there exists a graph (E, Γ) such that (E', Γ') is isomorphic to the line graph of (E, Γ) .

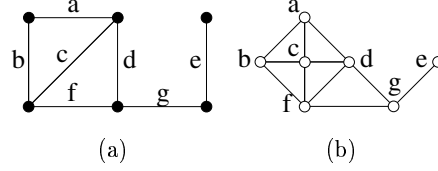


Fig. 2. A graph (a) and its line graph (b).

In Fig. 2, we show a graph and its line graph. All graphs are not line graphs, in other words, there exist some graphs which are not the line graphs of any graph. The following theorem allows to characterize line graphs.

Theorem 6 ([1]). *A graph G is a line graph if and only if none of the graphs of Fig. 3 is a subgraph of G .*

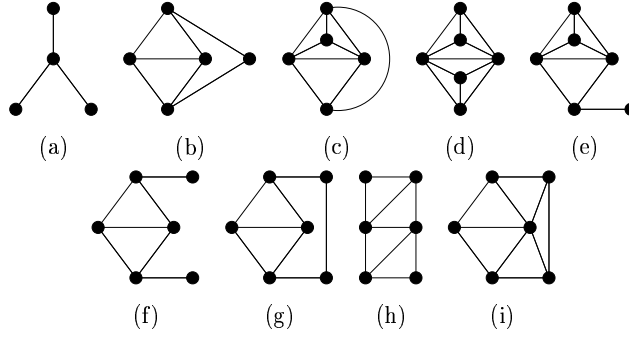


Fig. 3. Graphs for a characterization of line graphs (Th. 6).

As an illustration, we can check that the line graph depicted in Fig. 2b does not contain any graph of Fig. 3 as a subgraph. For example, the subgraph induced by the set $\{d, e, f, g\}$ of the graph shown in Fig. 2b is not the same as the graph of Fig. 3a since it contains one more edge.

2 Watersheds

Informally, in a graph, a watershed may be thought of as a “separating set” of vertices which cannot be reduced without merging some components of its complementary set (see Fig. 4d). We first give formal definitions of these concepts (see [3,5]) and related ones, then we derive some properties which will be used in the sequel.

Important remark. From now, when speaking about a graph (E, Γ) , we will assume for simplicity that E is non-empty and connected.

Notice that, nevertheless, the subsequent definitions and properties may be easily extended to non-connected graphs.

Definition 7. Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subseteq E$, and let $p \in X$.

We say that p is a border point (for X) if p is adjacent to \overline{X} .

We say that p is an inner point (for X) if p is not a border point for X , i.e., if $p \in \text{int}(X)$.

We say that p is W-simple (for X) if p is adjacent to exactly one connected component of \overline{X} .

We say that p is separating (for X) if p is adjacent to at least two connected components of \overline{X} .

We say that p is a multiple point (for X) if p is adjacent to at least three connected components of \overline{X} .

In this definition and the following ones, the prefix “W-” stands for watershed. In Fig. 4a, x is both a border point and a W-simple point for the set X constituted by the black vertices, and y is an inner point. In Fig. 5b, z is a border point and a separating point, and w is a border point, a separating point and a multiple point.

Definition 8. Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subseteq E$, and let $S \subseteq X$.

We say that S is W-simple (for X) if there exists $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that $A \cup S$ is connected and $\mathcal{C}(\overline{X}|S) = \{A\}$.

Obviously, a point p is W-simple if and only if the set $\{p\}$ is W-simple. Notice that, in the above definition, S is not necessarily connected. The following property may be proved easily.

Property 9. Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subseteq E$, and let $S \subseteq X$.

The set S is W-simple (for X) if and only if there exists $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that $\mathcal{C}(\overline{X} \cup S) = [\mathcal{C}(\overline{X}) \setminus \{A\}] \cup \{A \cup S\}$.

We are now ready to define the notion of watershed which is central to this section.

Definition 10. Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. Let $X \subseteq E$, let $Y \subseteq X$.

We say that Y is a W-thinning of X , written $X \searrow^W Y$, if

i) $Y = X$ or if

ii) there exists a set $Z \subseteq X$ which is a W-thinning of X and a point $p \in Z$ which is W-simple for Z , such that $Y = Z \setminus \{p\}$.

A set $Y \subseteq X$ is a watershed (in G) if $Y \searrow^W Z$ implies $Z = Y$.

A subset Y of X is a watershed of X if Y is a W-thinning of X and if Y is a watershed.

A watershed Y is non-trivial if $Y \neq \emptyset$ and $Y \neq E$.

It can be seen that we can obtain a W-thinning of X by iteratively removing W-simple points from X , and that Y is a watershed of X if Y is a W-thinning of X which contains no W-simple point. Fig. 4 shows a set X and some W-thinnings of X , the last one being a watershed of X . Notice that different watersheds may exist for a same set X . It can be also seen that a watershed X is non-trivial if and only if $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$.

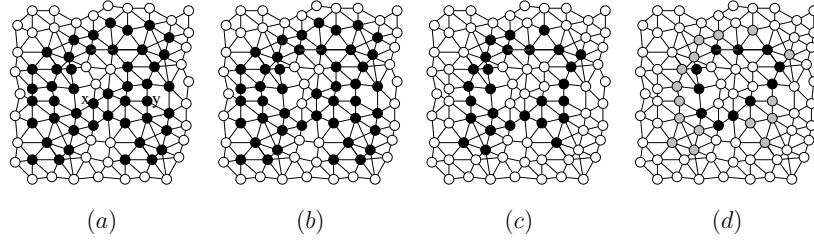


Fig. 4. Illustration of W-thinning and watershed. (a): A graph (E, Γ) and a subset X (black points) of E . The point x is a border point which is W-simple, and y is an inner point. (b): The set $Y = X \setminus \{x\}$ (black points) is a W-thinning of X . (c): The set Z (black points) is a W-thinning of both X and Y . The sets Y and Z are not watersheds: some W-simple points exist in both sets. (d): A watershed of X (black points), which is also a watershed of Y and of Z . The set of gray points will be used to illustrate the notion of annexation (Def. 16).

The following definition and theorem are borrowed from [3] and will play an important role in some subsequent proofs.

Definition 11. Let (E, Γ) be a graph. Let X, Y be subsets of E . We say that Y is an extension of X if $X \subseteq Y$ and if each connected component of Y contains exactly one connected component of X .

Theorem 12 ([3]). Let X and Y be subsets of E . The subset Y is a W-thinning of X if and only if \overline{Y} is an extension of \overline{X} .

We can see that if a subset S of X is W-simple for X , then $\overline{X \setminus S}$ is an extension of \overline{X} . From this observation and Th. 12, we immediatly deduce the following property.

Corollary 13. Let $X \subseteq E$ and $S \subseteq X$. If the subset S is W-simple for X , then $X \setminus S$ is a W-thinning of X .

A watershed is a set which contains no W-simple point, but some of the examples given below show that such a set is not always thin (in the sense of Def. 3). Fig. 4d and Fig. 5b are two examples of watersheds which are thin: in both cases, the set of black points has no W-simple point and no inner point. Fig. 5c,d show two examples of non-thin watersheds. Let us study what happens if we remove from a non-thin watershed X , a connected component

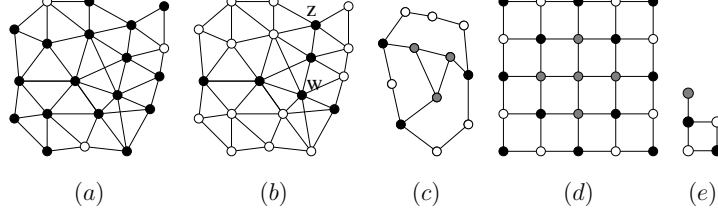


Fig. 5. Illustration of thin and non-thin watersheds. (a): A graph (E, Γ) and a subset X (black points) of E . (b): A subset Y (black points) of E which is a thin watershed; it is a watershed of the set X shown in (a). The border points z and w are both separating for Y , only w is a multiple point. (c, d, e): The subset X represented by black and gray points is a watershed which is not thin: $\text{int}(X)$ is depicted by the gray points.

of $\text{int}(X)$.

Property 14. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$ be a watershed. Let A be a connected component of $\text{int}(X)$. Then, $X \setminus A$ is a watershed.*

Proof: The cases where $|\mathcal{C}(\overline{X})| < 2$ or $\text{int}(X) = \emptyset$ are trivial: if $|\mathcal{C}(\overline{X})| = 0$ then $E = X = \text{int}(X) = A$ and $X \setminus A = \emptyset$; if $|\mathcal{C}(\overline{X})| = 1$ then it may be seen that X must be empty since E is connected, thus $X \setminus A = \emptyset$; and if $\text{int}(X) = \emptyset$ then $A = \emptyset$, thus $X \setminus A = X$. Suppose from now that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$ and $\text{int}(X) \neq \emptyset$. From Prop. 4, $A \in \mathcal{C}(\overline{X \setminus A})$. Let x be a point of $X \setminus A$, we have to prove that x cannot be W-simple for $X \setminus A$. If $x \notin \Gamma^*(A)$, we can easily see that the point x cannot be W-simple for $X \setminus A$, otherwise it would also be W-simple for X . Suppose now that $x \in \Gamma^*(A)$. The point x cannot belong to $\text{int}(X)$ otherwise A would not be a connected component of $\text{int}(X)$. Thus x must be adjacent to a component B of $\mathcal{C}(\overline{X})$, which is also a component of $\mathcal{C}(\overline{X \setminus A})$ (Prop. 4): hence, x is adjacent to both A and B , with $A \neq B$, and is not W-simple for $X \setminus A$. \square

The following corollary follows straightforwardly.

Corollary 15. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$. The set $X \setminus \text{int}(X)$ is a watershed.*

Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subset E$, let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. Let us consider the family \mathcal{W}_A of all the sets which are W-simple for X and adjacent to A . It may be easily seen that the family \mathcal{W}_A is closed by union, i.e., that $S \cup T$ belongs to \mathcal{W}_A whenever $S \in \mathcal{W}_A$ and $T \in \mathcal{W}_A$. From this observation, we deduce that there exists a unique element of \mathcal{W}_A which is maximal for the inclusion, and this element is the union of all the elements of the family.

Definition 16. *Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subset E$, let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. We define the annexation of A in X , denoted by $\text{ann}(A, X)$, as the union of all the sets*

which are W -simple for X and adjacent to A . When no confusion may occur, we write $\text{ann}(A) = \text{ann}(A, X)$.

In Fig. 4c, let A be the (white) component of \overline{Z} which “surrounds” the (black) set Z . The set $\text{ann}(A, Z)$ is depicted in light gray in Fig. 4d.

We have seen that, for any S which is W -simple for X and adjacent to A , the set $\overline{X} \cup S$ is an extension of \overline{X} . In particular, the set $\overline{X} \cup \text{ann}(A)$ is an extension of \overline{X} .

The following properties illustrate the notion of annexation, which will serve us to prove some of the main results of this paper.

Property 17. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$. For any $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$, there exists $B \in [\mathcal{C}(\overline{X}) \setminus \{A\}]$ such that $\Gamma^*(A \cup \text{ann}(A)) \cap \Gamma^*(B) \neq \emptyset$.*

The proof can be found in the annex. We leave the proof of the following property to the interested reader.

Property 18. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$, let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. The set $A \cup \text{ann}(A, X)$ is equal to the connected component of $\text{int}(X \cup A)$ which contains A .*

3 Merging

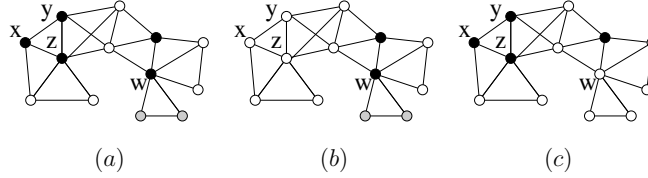


Fig. 6. Illustration of merging. (a): A graph (E, Γ) and a subset X of E (black points). (b): The black points represent $X \setminus S$ with $S = \{x, y, z\}$. (c): The black points represent $X \setminus S'$ with $S' = \{w\}$.

Consider the graph (E, Γ) depicted in Fig. 6a, where a subset X of E (black vertices) separates its complementary set \overline{X} into four connected components. If we replace the set X by, for instance, the set $X \setminus S$ where $S = \{x, y, z\}$, we obtain a set which separates its complementary set into three components, see Fig. 6b: we can also say that we “merged two components of \overline{X} through S ”. This operation may be seen as an “elementary merging” in the sense that only two components of \overline{X} were merged. On the opposite, replacing the set X by the set $X \setminus S'$ where $S' = \{w\}$, see Fig. 6c, would merge three components of \overline{X} . We also see that the component of \overline{X} which is below w (in light gray) cannot be merged by an “elementary merging” since any attempt to merge it

must involve the point w , and thus also the three components of \overline{X} adjacent to this point. In this section, we introduce definitions and basic properties related to such merging operations in graphs.

Definition 19. Let (E, Γ) be a graph and $X \subset E$. Let $p \in X$, let $S \subseteq X$. We say that p is F-simple (for X) if p is adjacent to exactly two connected components of \overline{X} .

We say that S is F-simple (for X) if S is adjacent to exactly two components $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that $A \cup B \cup S$ is connected.

In this definition, the prefix “F-” stands for fusion. Observe that the point p is F-simple if and only if the set $\{p\}$ is F-simple. For example, in Fig. 6a, the point z is F-simple while x, y, w are not. Also, the sets $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\}$ are F-simple, but the sets $\{x\}$, $\{y\}$ and $\{w\}$ are not.

Notice also that the set S is not necessarily connected. Furthermore, any connected component T of S must be adjacent to either A or B , or both, and cannot be adjacent to any other element of $\mathcal{C}(\overline{X})$. Thus we have the following property.

Property 20. Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$, let $S \subseteq X$ such that S is F-simple for X , and let $T \subseteq S$. If $T \in \mathcal{C}(S)$, then T is either W-simple or F-simple for X .

Definition 21. Let (E, Γ) be a graph and $X \subset E$. Let A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$, with $A \neq B$. We say that A and B can be merged (for X) if there exists $S \subseteq X$ such that S is F-simple for X and adjacent to both A and B . In this case, we also say that A and B can be merged through S (for X).

We say that A can be merged (for X) if there exists $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that A and B can be merged for X .

For example, in Fig. 6a, the component of \overline{X} in light gray cannot be merged, but each of the three white components can be merged for X .

Property 22. Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$, let $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$, $A \neq B$, and let $S \subseteq X$. The components A and B can be merged through S if and only if $A \cup B \cup S$ is a connected component of $\overline{X} \setminus S$. More precisely, A and B can be merged through S if and only if $\mathcal{C}(\overline{X} \setminus S) = [\mathcal{C}(\overline{X}) \setminus \{A, B\}] \cup \{A \cup B \cup S\}$.

Property 23. Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$, let $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ with $A \neq B$. The components A and B can be merged for X if and only if there exists $S \subseteq X$ such that S is connected and adjacent to only A and B .

The proof of Prop. 22 can be found in the annex, and the proof of Prop. 23 is elementary. The following property will be useful for establishing one of the main results of this article, namely Th. 33.

Property 24. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subseteq E$, and let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. The three following statements are equivalent:*

- i) A can be merged for X ;*
- ii) $[A \cup \text{ann}(A, X)]$ can be merged for $[X \setminus \text{ann}(A, X)]$;*
- iii) there exists an extension \overline{Y} of \overline{X} and there exists a vertex $x \in \Gamma^*(A')$ which is F -simple, where A' is the connected component of \overline{Y} which contains A .*

Proof:

- $[i \Rightarrow ii]$ From i), we know that there exists $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ and $S \subseteq X$ such that S is F -simple for X and adjacent to both A and B . Let $A' = A \cup \text{ann}(A, X)$, and let $Y = X \setminus \text{ann}(A, X)$. From Def. 16 and the observation which follows this definition, \overline{Y} is an extension of \overline{X} and $\mathcal{C}(\overline{Y}) = [\mathcal{C}(\overline{X}) \setminus \{A\}] \cup \{A'\}$. Let $S' = S \cap \overline{A'}$, thus $S' \subseteq Y$. We have: $A' \cup S' \cup B = A \cup S \cup B \cup A'$. We know that A' is connected, that $A \cup S \cup B$ is connected and that $A \subseteq A'$, thus $A \cup S \cup B \cup A'$ is connected, hence so is $A' \cup S' \cup B$. This implies that S' is adjacent to both A' and B . Since the only components of \overline{X} adjacent to S are A and B and since $S' \subseteq S$, we deduce that the only components of \overline{Y} adjacent to S' are precisely A' and B , thus S' is F -simple for Y , hence ii).

- $[ii \Rightarrow iii]$ Let $A' = A \cup \text{ann}(A, X)$, let $Y = X \setminus \text{ann}(A, X)$. We have seen that \overline{Y} is an extension of \overline{X} and that A' is the element of $\mathcal{C}(\overline{Y})$ which contains A . From ii), we know that there exists $B \in \mathcal{C}(\overline{Y})$ and $S \subseteq Y$ such that S is F -simple for Y and adjacent to both A' and B . There must exist some points in S which are adjacent to A' , let x be any such point. The point x cannot be W -simple for Y , otherwise the set $\text{ann}(A, X) \cup \{x\}$ would be W -simple for X and adjacent to A , a contradiction with the definition of $\text{ann}(A, X)$. Furthermore, since S is F -simple it cannot contain any multiple point, thus x is F -simple for Y .

- $[iii \Rightarrow i]$ Suppose that x is a point of $\Gamma^*(A')$ which is F -simple. Then, x is adjacent to A' and to B' , with $B' \in \mathcal{C}(\overline{Y})$, $B' \neq A'$, and $A' \cup B' \cup \{x\}$ is connected. Let B be the component of $\mathcal{C}(\overline{X})$ such that $B \subseteq B'$. Let us consider $S = [A' \setminus A] \cup [B' \setminus B] \cup \{x\}$. It can be easily seen that $S \subseteq X$ and that S is adjacent to both A and B . Since \overline{Y} is an extension of \overline{X} we know that A' (resp. B') cannot be adjacent to any other connected component of \overline{X} than A (resp. B). Also, x cannot be adjacent to any other connected component of \overline{X} than A and B , otherwise it could not be F -simple for Y . Furthermore, we have $A \cup B \cup S = A' \cup B' \cup \{x\}$, thus $A \cup B \cup S$ is connected. Thus, since S is adjacent to solely A and B , S is F -simple for X , and A can be merged for X . \square

From Def. 10 and Th. 12, any extension of a watershed X is equal to X . Thus, the following corollary is an immediate consequence of Prop. 24.

Corollary 25. *Let (E, Γ) be a graph, let $X \subset E$ be a watershed and let*

$A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. The subset A can be merged for X if and only if there exists a vertex $x \in \Gamma^*(A)$ which is F -simple for X .

4 Fusion graphs

Region merging [12,15] is a popular approach to image segmentation. Starting with an initial partition of the image pixels into connected regions, which can in some cases be separated by some boundary pixels, the basic idea consists of progressively merging pairs of regions until a certain criterion is satisfied. The criterion which is used to identify the next pair of regions which will merge, as well as the stopping criterion are specific to each particular method. Certain methods do not use graph vertices in order to separate regions, nevertheless even these methods fall in the scope of this study through the use of line graphs [9].

The preceding section and the present one constitute a theoretical basis for the study of such methods. The problems encountered by certain region merging methods (see [12], section 5.6: “When three regions meet”) can be avoided by using exclusively the notion of merging introduced in the previous section. In the sequel, we investigate several classes of graphs with respect to the possibility of “getting stuck” in a merging process. The most striking result of this section is a theorem which states the equivalence between one of these classes and the class of graphs in which any watershed is thin.

We begin with the definition of four classes of graphs.

Definition 26. We say that a graph (E, Γ) is a weak fusion graph if for any $X \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, there exist $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ which can be merged.

Definition 27. We say that a graph (E, Γ) is a fusion graph if for any $X \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, each $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ can be merged for X .

Let $X \subset E$, and let $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$. We set $\Gamma^*(A, B) = \Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$. We say that A and B are neighbors if $A \neq B$ and $\Gamma^*(A, B) \neq \emptyset$.

Definition 28. We say that the graph (E, Γ) is a strong fusion graph if, for any $X \subset E$, any A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ which are neighbors can be merged.

Definition 29. We say that the graph (E, Γ) is a perfect fusion graph if, for any $X \subset E$, any A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ which are neighbors can be merged through $\Gamma^*(A, B)$.

Basic examples and counter-examples of weak fusion, fusion, strong fusion and perfect fusion graphs are given in Fig. 7.

These classes are linked by inclusion relations. The following property clarifies these links, and also position our four classes of graphs with respect to general graphs and line graphs. We denote by \mathcal{G} (resp. \mathcal{G}_L , \mathcal{G}_P , \mathcal{G}_S , \mathcal{G}_F , and \mathcal{G}_W) the set of all graphs (resp. line graphs, perfect fusion graphs, strong fusion graphs, fusion graphs, and weak fusion graphs).

Property 30. *Any line graph is a perfect fusion graph,
any perfect fusion graph is a strong fusion graph,
any strong fusion graph is a fusion graph,
any fusion graph is a weak fusion graph.
More precisely, we have the following strict inclusion relations:
 $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{G}_P \subset \mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_F \subset \mathcal{G}_W \subset \mathcal{G}$.*

Proof: We prove in the annex (Lem. 58) that any strong fusion graph is a fusion graph. The other inclusions may be proved easily; let us prove that these inclusions are strict. It may be checked from the definitions that the graphs (g), (w), (f) and (s) in Fig. 7 are indeed counter-examples for the corresponding class equalities. It may also be checked that the graph (p) is a perfect fusion graph, while it is not a line graph, a consequence of Th. 6. \square

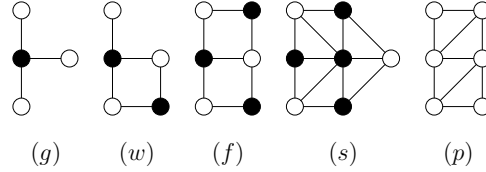


Fig. 7. Examples and counter-examples for different classes of graphs. (g): A graph which is not a weak fusion graph, (w): a weak fusion graph which is not a fusion graph, (f): a fusion graph which is not a strong fusion graph, (s): a strong fusion graph which is not a perfect fusion graph, and (p): a perfect fusion graph which is not a line graph. In the graphs (g, w, f, s), the black vertices constitute a set X which serves to prove that the graph does not belong to the pre-cited class.

The following property is a consequence of Def. 27, Cor. 25 and Prop. 24.

Property 31. *The graph $G = (E, \Gamma)$ is a fusion graph if and only if, for any non-trivial watershed Y in G and for any $A \in \mathcal{C}(\overline{Y})$, there exists $x \in \Gamma^*(A)$ which is F-simple.*

Proof: Let (E, Γ) be a fusion graph, let Y be a non-trivial watershed (thus $|\mathcal{C}(\overline{Y})| \geq 2$), and let $A \in \mathcal{C}(\overline{Y})$. Since (E, Γ) is a fusion graph, we know that A can be merged for Y , thus by Cor. 25, there exists $x \in \Gamma^*(A)$ which is F-simple.

Suppose now that for any non-trivial watershed $Y \subset E$ and for any $A' \in \mathcal{C}(\overline{Y})$, there exists $x \in \Gamma^*(A')$ which is F-simple. Let $X \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. Let Y be a watershed of X , and let $A' \in \mathcal{C}(\overline{Y})$ such that $A \subseteq A'$. By hypothesis, there exists $x \in \Gamma^*(A')$ which is F-simple for A' . Furthermore,

by Th. 12 we know that Y is an extension of X , thus by Prop. 24, A can be merged for X . \square

From Prop. 31, we deduce Prop. 32 which will be used in the proof of Th. 41.

Property 32. *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. If G is not a fusion graph, then there exist $X \subset E$ and $x \in X$ such that x is a multiple point for X .*

Proof: If G is not a fusion graph, then by Prop. 31, there exists $Y \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{Y})| \geq 2$, there exists a watershed X of Y , there exists $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that any $x \in \Gamma^*(A)$ is not F-simple. For any such x , since $x \in \Gamma^*(A)$, x is not an inner point; and since X is a watershed, x is not W-simple; thus x must be a multiple point. Furthermore, since $|\mathcal{C}(\overline{Y})| \geq 2$ and thus $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, we have $A \neq E$, and since E is connected, from Cor. 2 there must exist a point x in $\Gamma^*(A)$. \square

Notice that the converse of Prop. 32 is false, as shown by the case of Fig. 7f which is a fusion graph, in which a given subset (black dots) has one multiple point.

Now, we present the main theorem of this section, which establishes that the class of graphs for which any watershed is thin is precisely the class of fusion graphs. As an immediate consequence of this theorem and Prop. 30, we see that all watersheds in fusion graphs, strong fusion graphs, perfect fusion graphs and line graphs are thin.

Theorem 33. *A graph G is a fusion graph if and only if any non-trivial watershed in G is thin.*

Proof: Let (E, Γ) be a fusion graph, let $Y \subset E$ be a non-trivial watershed. Suppose that $\text{int}(Y) \neq \emptyset$, and let $A \in \mathcal{C}(\text{int}(Y))$. Let $Y' = Y \setminus A$. By Prop. 14, Y' is a watershed. Since (E, Γ) is a fusion graph, from Prop. 31 we deduce that there exists a vertex $x \in \Gamma^*(A)$ which is F-simple for Y' , i.e., x is adjacent to exactly two connected components of $\overline{Y'}$. Since $\mathcal{C}(\overline{Y'}) = \mathcal{C}(\overline{Y}) \cup \{A\}$ (Prop. 4), this means that x is only adjacent to one connected component of \overline{Y} , i.e., x is W-simple for Y , a contradiction with the fact that Y is a watershed. Thus, Y is thin.

Suppose now that (E, Γ) is not a fusion graph, by Prop. 31 there exists a non-trivial watershed $Y \subset E$, and there exists $A \in \mathcal{C}(\overline{Y})$ such that any $x \in \Gamma^*(A)$ cannot be F-simple. Furthermore, since Y is a watershed we know that any x in $\Gamma^*(A)$ cannot be W-simple for Y , thus any point x in $\Gamma^*(A)$ is a multiple point. Consider now the set $Y' = Y \cup A$, and let y be a point of Y' . Only three cases are possible: 1) if $y \in A$, then we can see that y is an inner point for Y' , thus y is not W-simple for Y' ; 2) if $y \in \Gamma^*(A)$, then as seen before, y is a multiple point for Y , thus y is adjacent to at least two connected components

of Y' consequently y is not W-simple for Y' ; 3) if $y \notin \Gamma(A)$, then y is not W-simple for Y' , otherwise Y could not be a watershed. Thus, Y' is a watershed. Furthermore, $A \subseteq \text{int}(Y')$ and $A \neq \emptyset$, thus Y' is not thin. \square

Let us look at some examples to illustrate this property. The graphs of Fig. 5c and Fig. 5d are not fusion graphs, in fact they are not even weak fusion graphs; we see that they may indeed contain a non-thin watershed. On the other hand, Fig. 5e is an example of a weak fusion graph which is not a fusion graph (see also Fig. 7w) with a watershed which is not thin.

We conclude this section with a nice property of perfect fusion graphs, which can be useful to design hierarchical segmentation methods based on watersheds. Consider the example of Fig. 8a, where a watershed X (black points) in the graph G separates \bar{X} into two components. Consider now the set Y (gray points) which is a watershed in the subgraph of G induced by one of these components. We can see that the union of the watersheds, $X \cup Y$, is not a watershed, since the point x is W-simple for $X \cup Y$. Property Prop. 34 shows that this problem cannot occur in any perfect fusion graph.

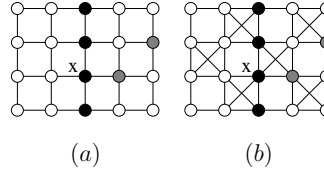


Fig. 8. Illustrations for Prop. 34. (a): The graph is not a perfect fusion graph (see Sec. 6, Prop. 45), and the union of the watersheds is not a watershed. (b): The graph is a perfect fusion graph (see Sec. 7, Prop. 54), the property holds.

Property 34. *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. If G is a perfect fusion graph, then for any watershed $X \subset E$ in G and for any watershed $Y \subset A$ in G_A , where $A \in \mathcal{C}(\bar{X})$ and G_A is the subgraph of G induced by A , the set $X \cup Y$ is a watershed in G .*

The proof may be found in the annex. It uses Th. 33 and a local characterization of perfect fusion graphs which will be established in the next section. Fig. 8b illustrates the property with a perfect fusion graph (the set X is depicted in black and the set Y in gray).

5 Local characterizations

The definitions of weak fusion, fusion, strong fusion and perfect fusion graphs are based on conditions that must be verified for all the subsets of the vertex set. This means, if we want to check whether a graph is, for instance, a perfect

fusion graph, then using the straightforward method based on the definition will cost an exponential time with respect to the number of vertices.

On the other hand, we know that certain classes of graphs have local characterizations. For example, line graphs may be recognized thanks to Th. 6, a condition which can be checked independently in a limited neighborhood of each vertex. Do such characterizations exist for the four classes of fusion graphs? We prove in this section that weak fusion graphs and fusion graphs cannot be characterized locally, and we give local conditions for characterizing strong fusion and perfect fusion graphs.

Let (E, Γ) be a graph, let $x \in E$ and $k \in \mathbb{N}$, we denote by $\Gamma^k(x)$ the k^{th} order neighborhood of x , that is, $\Gamma^k(x) = \Gamma(\Gamma^{k-1}(x))$, with $\Gamma^0(x) = \{x\}$.

Property 35. *There is no local characterization of weak fusion graphs. More precisely, let k be an arbitrary positive integer. There is no property \mathcal{P} on graphs such that an arbitrary graph $G = (E, \Gamma)$ is a weak fusion graph if and only if, for all $x \in E$, $\mathcal{P}[G(x, k)]$ is true, $G(x, k)$ being the subgraph of G induced by $\Gamma^k(x)$.*

Proof: It can be seen that the graphs of Fig. 9a are weak fusion graphs, while those of Fig. 9b are not. In addition, for any integer k , the same “ k -local configurations” may be found in both families, for a sufficiently large graph. \square

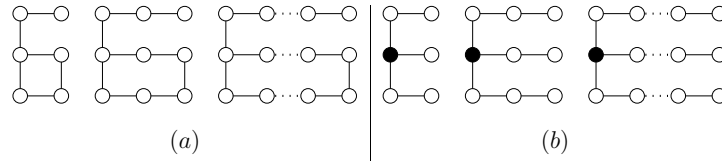


Fig. 9. Graphs for the proof of Prop. 35. In each graph of (b), the black vertices denote a set X such that the condition for a weak fusion graph is not true.

Property 36. *There is no local characterization of fusion graphs. More precisely, let k be an arbitrary positive integer. There is no property \mathcal{P} on graphs such that an arbitrary graph $G = (E, \Gamma)$ is a fusion graph if and only if, for all $x \in E$, $\mathcal{P}[G(x, k)]$ is true, $G(x, k)$ being the subgraph of G induced by $\Gamma^k(x)$.*

Proof: It can be seen that the graphs of Fig. 10a are fusion graphs, while those of Fig. 10b are not. In addition, for any integer k , the same “ k -local configurations” may be found in both families, for a sufficiently large graph. \square

We are now going to prove that strong fusion graphs can be characterized locally. A few preliminary properties will help us to organize the proof. The following one states that in a strong fusion graph, if two neighboring compo-

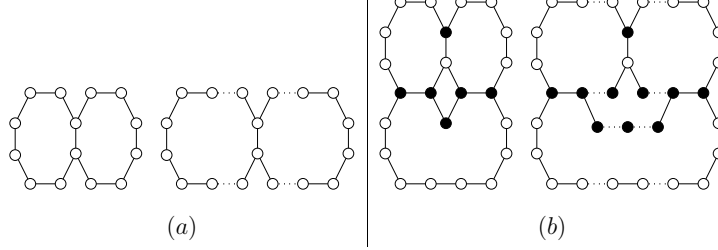


Fig. 10. Graphs for the proof of Prop. 36. In each graph of (b), the black vertices denote a set X such that the condition for a fusion graph is not true.

nents A and B can be merged, then they can be merged through a set S which is “close” to A and B , furthermore (next property), this set S can be reduced to one or two points.

Property 37. *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. The graph G is a strong fusion graph if and only if for any $X \subseteq E$, for any A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that A, B are neighbors, there exists $S \subseteq [\Gamma^*(A) \cup \Gamma^*(B)]$ such that A and B can be merged through S .*

Proof: Suppose that G is a strong fusion graph. Let $X \subseteq E$, let A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that A, B are neighbors. Let $X' = X \setminus \text{int}(X)$. Thus, each point of X' is adjacent to (at least) one component of $\mathcal{C}(\overline{X'})$. Obviously, A, B are also components of $\mathcal{C}(\overline{X'})$, and $\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B) \neq \emptyset$. Since (E, Γ) is a strong fusion graph, there exists a subset S of X' such that A, B can be merged through S , that is, S is F-simple for X' and adjacent to A and B . Since $\text{int}(X') = \emptyset$ and $S \subseteq X'$, we have $\text{int}(S) = \emptyset$. Thus, it can be easily seen that $S \subseteq \Gamma^*(A) \cup \Gamma^*(B)$. Since $X' \subseteq X$ and $\mathcal{C}(\overline{X}) \subseteq \mathcal{C}(\overline{X'})$ (a consequence of Prop. 4), it follows straightforwardly that S is also F-simple for X . This proves the forward implication, the converse is immediate. \square

Property 38. *The graph $G = (E, \Gamma)$ is a strong fusion graph if and only if, for any $X \subseteq E$, for any A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that A, B are neighbors, there exists $a \in \Gamma^*(A)$ and $b \in \Gamma^*(B)$ such that A and B can be merged through $\{a, b\}$.*

Proof: Suppose that G is a strong fusion graph, let $X \subseteq E$, let A and $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that A, B are neighbors. By Prop. 37, there exists $S \subseteq [\Gamma^*(A) \cup \Gamma^*(B)]$ such that A and B can be merged through S . Without loss of generality (by Prop. 23), we may assume that S is connected. If S contains a point $x \in \Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$, then the forward implication is proved with $a = b = x$. Otherwise, S may be partitioned into two disjoint sets $A' = S \cap \Gamma^*(A)$ and $B' = S \cap \Gamma^*(B)$. Since S is connected, by Prop. 1 the sets A' and B' must be adjacent, thus there exists $a \in A'$ and $b \in B'$ which are adjacent, and since S is F-simple it can be easily seen that $\{a, b\}$ is also F-simple. This proves the

forward implication, the converse is immediate. \square

Notice that in the two previous properties, the merging set S (or $\{a, b\}$) must belong to the union of $\Gamma^*(A)$ and $\Gamma^*(B)$, not to the intersection; more informally it means that A and B cannot necessarily be merged through a subset of their common boundary. To show that it is not necessary that S be included in $\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$ for having a strong fusion graph, it suffices to consider the graph G depicted in Fig. 11. It may be checked that G is indeed a strong fusion graph. Consider the set X of black vertices, $A = \{x\}$ and $B = \{y\}$ (which are neighbors) can only be merged through $S = \{a, b\}$ which is included in $\Gamma^*(A) \cup \Gamma^*(B)$ but not in $\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$.

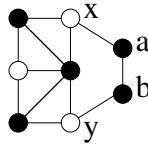


Fig. 11. Illustration of Prop. 37 and Prop. 38.

More generally, if two components A, B of \bar{X} can only be merged through a two-element set $S = \{a, b\}$, it can be seen that necessarily both a and b are W-simple. This means in particular that a configuration like Fig. 11 cannot occur if X is a watershed. From this remark, we can derive a simpler characterization of strong fusion graphs, in which we consider only the subsets X of E which are watersheds.

Property 39. *The graph (E, Γ) is a strong fusion graph if and only if, for any $X \subseteq E$ which is a watershed, for any A and $B \in \mathcal{C}(\bar{X})$ such that A, B are neighbors, there exists $x \in [\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)]$ which is F -simple for X .*

We are now ready to prove the local characterization theorem for strong fusion graphs.

Let x and y be two points, we say that x and y are 2-adjacent if $y \notin \Gamma(x)$ and $\Gamma^*(x) \cap \Gamma^*(y) \neq \emptyset$.

Theorem 40. *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. The graph G is a strong fusion graph if and only if, for any two points $x, y \in E$ which are 2-adjacent, there exists $a \in \Gamma^*(x)$ and $b \in \Gamma^*(y)$ such that $b \in \Gamma(a)$ and $\Gamma(\{a, b\}) \subseteq [\Gamma(x) \cup \Gamma(y)]$.*

Proof: Suppose that G is a strong fusion graph. Let $x, y \in E$ which are 2-adjacent, and consider the set $X = \Gamma^*(x) \cup \Gamma^*(y)$. We observe that the sets $A = \{x\}$ and $B = \{y\}$ are two elements of $\mathcal{C}(\bar{X})$. By Prop. 38, there exists $a \in \Gamma^*(x)$ and $b \in \Gamma^*(y)$, $b \in \Gamma(a)$, such that A and B can be merged through $\{a, b\}$ for X . Thus a and b must be mutually adjacent, and $\{a, b\}$ cannot be adjacent to a component of \bar{X} which is neither $\{x\}$ nor $\{y\}$, hence

$\Gamma(\{a, b\}) \subseteq [\Gamma(x) \cup \Gamma(y)]$. Thus the forward implication is proved, and the converse is straightforward. \square

We give below seven necessary and sufficient conditions for perfect fusion graphs. Remind that in perfect fusion graphs, any two components A, B of $\mathcal{C}(\bar{X})$ which are neighbors can be merged through $\Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$. Thus, perfect fusion graphs constitute an ideal framework for region merging methods. In the sequel, we will use the symbol G^\blacktriangle to denote the graph of Fig. 3a.

Theorem 41. *Let (E, Γ) be a graph.*

The eight following statements are equivalent:

- i) (E, Γ) is a perfect fusion graph;*
- ii) for any $x \in E$, any $X \subseteq \Gamma(x)$ contains at most two connected components;*
- iii) for any non-trivial watershed Y in E , each point x in Y is F -simple;*
- iv) for any connected subset A of E , the subgraph of (E, Γ) induced by A is a fusion graph;*
- v) for any subset X of E , there is no multiple point for X ;*
- vi) the graph G^\blacktriangle is not a subgraph of G ;*
- vii) any vertices x, y, z which are mutually non-adjacent are such that $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma(z) = \emptyset$;*
- viii) for any $x, y \in E$ which are 2-adjacent, for any $z \in \Gamma^*(x) \cap \Gamma^*(y)$, we have $\Gamma(z) \subseteq [\Gamma(x) \cup \Gamma(y)]$.*

Proof: We will show that $[not\ ii] \Rightarrow [not\ iii] \Rightarrow [not\ iv] \Rightarrow [not\ v] \Rightarrow [not\ vi] \Rightarrow [not\ vii] \Rightarrow [not\ viii] \Rightarrow [not\ i] \Rightarrow [not\ ii]$, hence the equivalence of the eight statements.

- $[not\ ii \Rightarrow not\ iii]$ Suppose that there exists $x \in E$ and there exists $X \subseteq \Gamma(x)$ which contains three distinct connected components A, B, C . Let $Y = E \setminus (A \cup B \cup C)$, and let Z be a watershed of Y . Necessarily, $x \in \bar{X}$ and thus $x \in Y$. Furthermore, since x is adjacent to three distinct components of \bar{Y} , we know that $x \in Z$ and that x is also adjacent to three distinct components of \bar{Z} , and thus is not F -simple for Z .
- $[not\ iii \Rightarrow not\ iv]$ Suppose that there exist a non-trivial watershed Y and a point $x \in Y$ which is not F -simple for Y . Since Y is a watershed, we know that x is not either a W -simple point. If x is an inner point, by Th. 33 we deduce that (E, Γ) cannot be a fusion graph, and thus condition *iv* does not hold for $A = E$. Otherwise, x is a multiple point for Y . Then, consider the set $A = [\Gamma(x) \setminus Y] \cup \{x\}$. Let (A, Γ_A) be the subgraph of (E, Γ) induced by A , and let $X = \{x\}$. The set A is connected, and since x is a multiple point for Y , $A \setminus X$ must contain at least three connected components for (A, Γ_A) , furthermore these components cannot be merged for X since x is the only point separating them. Thus (A, Γ_A) is not a fusion graph.
- $[not\ iv \Rightarrow not\ v]$ Suppose that there exists a connected subset A of E such that the restriction (A, Γ') of (E, Γ) to A is not a fusion graph. By Prop. 32, there exists $X \subset A$ and $x \in X$ such that x is a multiple point for X in (A, Γ') .

Obviously, x is also a multiple point for $[E \setminus A] \cup X$ in (E, Γ) .

- [not $v \Rightarrow$ not vi] Suppose that there exists a subset X of E and a point $x \in X$ which is a multiple point, i.e., x is adjacent to three distinct connected components A, B, C of \bar{X} . Let $w \in \Gamma(x) \cap A$, $y \in \Gamma(x) \cap B$, and $z \in \Gamma(x) \cap C$. Since A, B, C are distinct connected components of \bar{X} , w, y, z are mutually non-adjacent, thus the subgraph induced by $\{x, y, z, w\}$ is G^\blacktriangle .
- [not $vi \Rightarrow$ not vii] Suppose that the subgraph of G induced by some points $\{x, y, z, w\}$ is G^\blacktriangle , the central point being x . We have $x \in \Gamma(w) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma(z)$, and w, y, z are mutually non-adjacent.
- [not $vii \Rightarrow$ not $viii$] Let w, y, z be three mutually non-adjacent points of E such that $\Gamma(w) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma(z) \neq \emptyset$, and let $x \in \Gamma(w) \cap \Gamma(y) \cap \Gamma(z)$. We have y and z which are 2-adjacent, $x \in \Gamma^*(y) \cap \Gamma^*(z)$, but $\Gamma(x)$ contains w which is not in $\Gamma(y) \cup \Gamma(z)$ by hypothesis.
- [not $viii \Rightarrow$ not i] Let $y, z \in E$ be two points which are 2-adjacent, and let $x \in \Gamma^*(y) \cap \Gamma^*(z)$ such that there exists $w \in \Gamma(x)$, $w \notin \Gamma(y) \cup \Gamma(z)$. Let $X = E \setminus \{y, z, w\}$. Let $A = \{y\}$, $B = \{z\}$, and $C = \{w\}$. From our hypothesis, we know that A, B and C belong to $\mathcal{C}(\bar{X})$. Let $S = \Gamma^*(A, B) = \Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$, clearly $x \in S$. Since x is also adjacent to C , A and B (which are neighbors) cannot be merged through S , and the graph is not a perfect fusion graph.
- [not $i \Rightarrow$ not ii] We will prove in fact that $ii \Rightarrow i$. Suppose that ii holds, and let $X \subset E$, let $A, B \in \mathcal{C}(\bar{X})$ such that $\Gamma^*(A, B) \neq \emptyset$. For any x in $\Gamma^*(A, B)$, from the hypothesis (ii) we deduce that x is only adjacent to A and B . Furthermore $A \cup B \cup \Gamma^*(A, B)$ is obviously connected, thus $\Gamma^*(A, B)$ is F-simple for X , and A and B can be merged through $\Gamma^*(A, B)$. \square

Notice that condition $viii$ bears a resemblance with the local characterization of strong fusion graphs (Th. 40).

Remind that any line graph is a perfect fusion graph (Prop. 30). We can see that, thanks to Th. 41 (condition vi), perfect fusion graphs can be characterized in a way similar to Th. 6 which characterizes line graphs, but with a much simpler condition.

A consequence of Th. 41 is that all the graphs of Fig. 3 except graph G^\blacktriangle are perfect fusion graphs, since none of these graphs contains G^\blacktriangle as a subgraph. The reader can also check anyone of the previous eight conditions on these graphs, as an illustration of Th. 41.

Corollary 42. *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph, let X be any connected subset of E . If G is a perfect fusion graph, then the subgraph of G induced by X is also a perfect fusion graph.*

6 Usual grids

The aim of this section and the following one is to answer the question: which are the grids that may be used in order to perform safe merging operations on digital images? In this section, we consider the different grids commonly used in 2-dimensional and 3-dimensional image processing. Our major result is that none of these grids is a perfect fusion graph and several are not even fusion graphs. One of the consequences is that the most natural merging operation, which consists in merging two regions through their common boundary, is not a safe operation in these grids.

We start with some basic definitions which allow to structure the pixels of an image. In this section and the following one, we will assume that n is a strictly positive integer.

Definition 43. *Let E be a set and let E^n be the Cartesian product of n copies of E . An element x of E^n may be seen as a map from $\{1, \dots, n\}$ to E , for each $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i is the i -th coordinate of x .*

Let \mathbb{Z} be the set of integers. We consider the families of sets H_0^1, H_1^1 such that $H_0^1 = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $H_1^1 = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. A subset S of \mathbb{Z}^n which is the Cartesian product of exactly $m \leq n$ elements of H_1^1 and $(n-m)$ elements of H_0^1 is called a m -cube.

In order to recover a graph structure for digital images, adjacency relations are defined on \mathbb{Z}^n . The following definition allows to retrieve the most frequently used adjacency relations.

Definition 44. *Let $m \leq n$, we say that x and y in \mathbb{Z}^n are m -adjacent if there exists a m -cube that contains both x and y . We define Γ_m^n as the binary relation on \mathbb{Z}^n such that for any pair x, y in E , $(x, y) \in \Gamma_m^n$ if and only if x and y are m -adjacent.*

In order to deal with graphs that can be arbitrary large we define a *grid* as a pair (E, Γ) where E is an infinite set and Γ is a binary relation on E . Let $X \subseteq E$ we define the restriction of (E, Γ) to X as the pair (X, Γ_X) where $\Gamma_X = \Gamma \cap (X \times X)$. If X is a finite set (X, Γ_X) is a graph. In the sequel, to simplify the notations, we will write Γ as a shortcut for Γ_X .

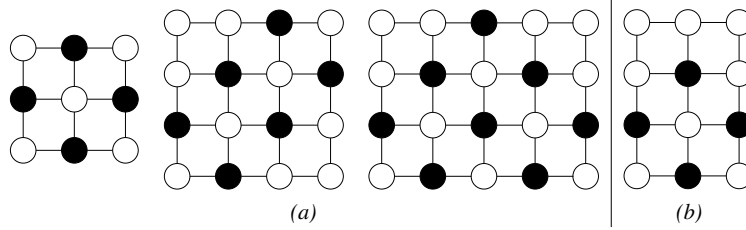


Fig. 12. (a): Counter-examples for the weak fusion property of (E, Γ_1^2) ; The black points represent a set X ; (b): counter-example for the fusion property of (E, Γ_1^2) when $\{w, h\} = \{3, 4\}$.

6.1 2-dimensional usual grids

Let w, h be two integers strictly greater than 1, called respectively *width* and *height*, we set $E = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x_1 < w \text{ and } 0 \leq x_2 < h\}$. In this section we study the connected graph (E, Γ_1^2) (resp. (E, Γ_2^2)) which is the restriction of $(\mathbb{Z}^2, \Gamma_1^2)$ (resp. $(\mathbb{Z}^2, \Gamma_2^2)$) to E .

Notice that in the literature, the graph (E, Γ_1^2) (resp. (E, Γ_2^2)) corresponds to the 4 (resp. 8)-adjacency.

Property 45. *Let $w > 2$ and $h > 2$. If $\{w, h\} \neq \{3, 4\}$, (E, Γ_1^2) is not a weak fusion graph. If $\{w, h\} = \{3, 4\}$ then (E, Γ_1^2) is a weak fusion graph but not a fusion graph.*

Proof: If $\{w, h\} \neq \{3, 4\}$, let us consider the following set:

- (1): if both w and h are odd, $X = \{(i, j) \mid i + j \text{ is odd}\}$;
- (2): if only w is odd, $X = \{(i, j) \mid i + j \text{ is odd}\} \setminus \{(0, h-1), (w-1, h-1)\}$;
- (3): if only h is odd, $X = \{(i, j) \mid i + j \text{ is odd}\} \setminus \{(w-1, 0), (w-1, h-1)\}$;
- (4) if both w and h are even, $X = \{(i, j) \mid i + j \text{ is odd}\} \setminus \{(0, h-1), (w-1, 0)\}$.

Fig. 12a shows the set X for image domains of size 3×3 , 4×4 and 5×4 .

It may be easily checked that any connected component of \overline{X} cannot be merged for X .

Let $\{w, h\} = \{3, 4\}$. Then (E, Γ_1^2) is a weak fusion graph (exhaustive check). The graph of Fig. 12b shows a set X such that there exists connected components of \overline{X} which cannot be merged, hence (E, Γ_1^2) is not a fusion graph. \square

Let $X \subseteq E$, we say that $x \in X$ matches C_1 if the neighborhood of x corresponds to the configuration C_1 depicted in Fig. 13a or to one of its $\pi/2$ rotations. In Fig. 13, points labelled B are in X , points labelled W are in \overline{X} , at least one of the points labelled U is in \overline{X} and the point I is either in X or in \overline{X} .

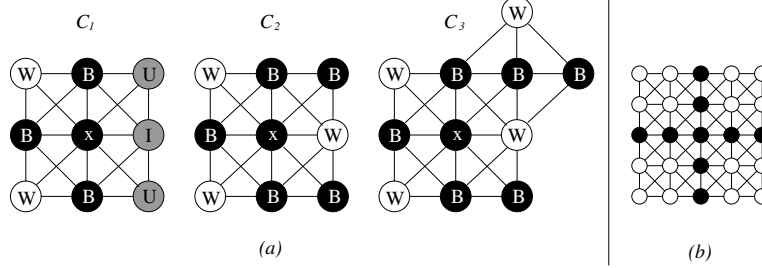


Fig. 13. (a): Local configurations which are used for proving Lem. 47; configurations C_1 and C_2 are the local configurations of multiple points in (E, Γ_2^2) ; (b): counter-example for the strong fusion property of (E, Γ_2^2) .

We say that x matches C_2 if the neighborhood of x corresponds to the configuration C_2 depicted in Fig. 13a or to one of its $\pi/2$ rotations.

Lemma 46. *Let $X \subseteq E$ be a watershed on (E, Γ_2^2) . Then any x in X which is multiple matches either C_1 or C_2 .*

Proof: Exhaustive check. \square

Lemma 47. *Let $X \subseteq E$ be a non-trivial watershed on (E, Γ_2^2) . Then any $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ can be merged.*

Proof: Suppose that A cannot be merged, then any $x \in X \cap \Gamma_2^2(A)$ is multiple. As (E, Γ_2^2) is connected and $\mathcal{C}(\overline{X}) > 2$, such x exists. Thus x matches C_1 or C_2 . Suppose that x matches C_1 . If the two points labelled W in C_1 belong to the same connected component of \overline{X} then the point at the west of x is W-simple, a contradiction with the fact that X is a watershed. Thus necessarily these two points belong to distinct components of \overline{X} , and the point at the west of x is F-simple. If A contains one of the these two points, labelled W in C_1 , then A is adjacent to an F-simple point and thus can be merged. Otherwise A contains one of the points labelled U. In this case the same arguments can be used to prove that A can be merged, thus x does not match C_1 .

Suppose that x matches C_2 . For the same reasons, A is the connected component that contains the point at the east of x . As A cannot be merged, necessarily the point which is at the north of x is multiple. Then the only possible configuration is C_3 , which is depicted in Fig. 13a. In configuration C_3 , it can be verified that the point at the north-east of x is necessarily F-simple. Thus A can be merged, a contradiction. \square

Property 48. *Let $h > 2$ and $w > 2$, the graph (E, Γ_2^2) is a fusion graph but is not a strong fusion graph.*

Proof: The fact that (E, Γ_2^2) is a fusion graph is a direct corollary of Lem. 47

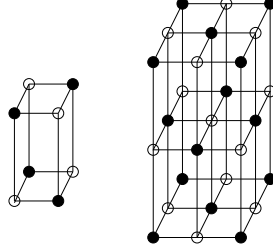


Fig. 14. Counter-examples for the weak fusion property of (E, Γ_1^3) . The black points represent a set X .

and Th. 33. Let us consider the set X , composed by the black points in Fig. 13b. It can be seen that this type of “global cross configurations” can be extended whatever the size of E (with $h > 2$ and $w > 2$). In these “cross configurations”, the connected components which are diagonally neighbor to each other cannot be merged. Thus the graph (E, Γ_2^2) is not a fusion graph. \square

6.2 3-dimensional usual grids

Let w , h and d be three integers strictly greater than 1, called respectively *width*, *height* and *depth*, we set $E = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq x_1 < w, 0 \leq x_2 < h \text{ and } 0 \leq x_3 < d\}$. In the sequel we will consider that $w > 1, h > 1$ and $d > 1$. In this section we study the graphs (E, Γ_1^3) (resp. (E, Γ_3^3)) which is the restriction of $(\mathbb{Z}^3, \Gamma_1^3)$ (resp. $(\mathbb{Z}^3, \Gamma_3^3)$) to E .

Notice that in the literature, the graph (E, Γ_1^3) (resp. (E, Γ_3^3)) corresponds to the 6 (resp. 26)-adjacency.

Property 49. *The graph (E, Γ_1^3) is not a weak fusion graph.*

Proof: Let us consider the set X such that $X = \{x \in E \mid \text{the number of odd coordinates of } x \text{ is equal to 0 or 2}\}$. This set corresponds to a 3-dimensional chessboard. Samples of such a set are shown in Fig. 14. It may be easily seen that any element of \overline{X} is a connected component that cannot be merged without involving at least two other connected components. Hence the graph is not a weak fusion graph. \square

Property 50. *If $w \geq 5, h \geq 5, d \geq 5$, the graph (E, Γ_3^3) is not a fusion graph.*

Proof: Let us consider the set \overline{X} of white points depicted in Fig. 15. Whatever the size of E and supposing that all points of E outside the figure are in X , it may be seen that the central point x is such that $\{x\}$ is a connected component of \overline{X} . Any point 3-adjacent to x (the set of gray points) is adjacent to at least three distinct connected components of \overline{X} . Thus any attempt to merge $\{x\}$

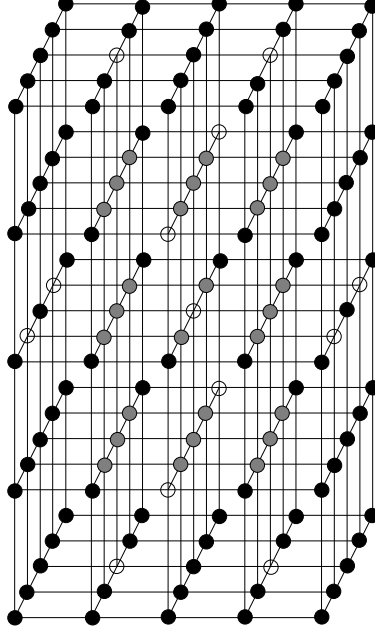


Fig. 15. Counter-example for the fusion property of (E, Γ_3^3) . Black and gray points represent a set X .

will involve three connected components of \overline{X} , hence $\{x\}$ cannot be merged, (E, Γ_3^3) is not a fusion graph. \square

7 Perfect fusion grid

We introduce a grid for structuring n -dimensional digital images and prove that it is a perfect fusion graph, whatever the dimension n . It does thus constitute a structure on which regions can be safely merged.

Let us give an intuitive idea of this grid. Fig. 16a shows a watershed of Fig. 1a obtained on this grid. It can be easily seen that the problems pointed out in the introduction do not exist in this case. The watershed does not contain any inner point. Any pair of neighboring regions can be merged by simply removing from the watershed the points which are adjacent to both regions (see Fig. 16b,c). Furthermore, the resulting set is still a watershed.

It may be seen that this grid is “between” the usual grids. In [7] we prove that this grid is the unique such graph.

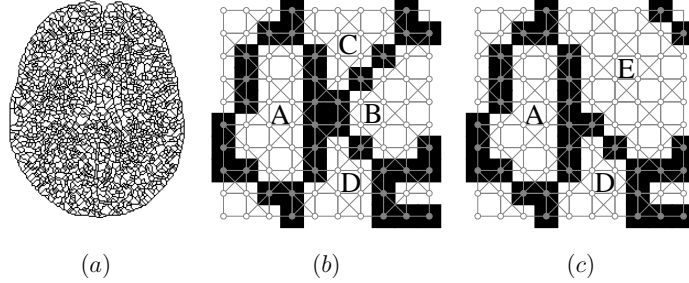


Fig. 16. (a): A watershed of Fig. 1 obtained on the perfect fusion grid; (b): a crop of (a) where the region A , B , C and D corresponds to the region shown in Fig. 1d; in gray, the corresponding perfect fusion grid is superimposed; (c): same as (d) after having merged B and C to form a new region, called E .

Let C^n be the set of all n -cubes of \mathbb{Z}^n , we define the map B from C^n to \mathbb{Z}^n , such that for any $c \in C^n$, $B(c)_i = \min\{x_i \mid x \in c\}$, where $B(c)_i$ is the i -th coordinate of $B(c)$. It may be seen that c is equal to the Cartesian product: $\{B(c)_1, B(c)_1 + 1\} \times \dots \times \{B(c)_n, B(c)_n + 1\}$. Thus clearly B is a bijection. We set $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. We set $\bar{0} = 1$ and $\bar{1} = 0$. A *binary word of length n* is an element of \mathbb{B}^n . If u is in \mathbb{B}^n , we define the *complement of u* as the binary word \bar{u} such that for any $i \in \{1, \dots, n\}$, $(\bar{u})_i = (\bar{u}_i)$.

Before defining perfect fusion grids, we first recall the definition of cliques, and a property due to Berge which uses maximal cliques to characterize some line graphs. This property will be used in the proof of Prop. 54.

Let E be a set, let Γ be a binary relation on E and let $X \subseteq E$. We say that X is a *clique* (for (E, Γ)) if $X \times X \subseteq \Gamma$. In other words, X is a clique if any two vertices of X are adjacent. We say that X is a *maximal clique* if, for any clique X' , $X \subseteq X'$ implies $X' = X$.

Property 51 (Prop. 7 in [2], chapter 17). *Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph. If for any $x \in E$, x is in at most two distinct maximal cliques, then G is a line graph.*

Definition 52. *Let f be the map from C^n to \mathbb{B}^n such that for any $c \in C^n$, $f(c)_i$ is equal to $B(c)_i \bmod 2$, that is the remainder in the integer division of $B(c)_i$ by 2.*

Let u be an element of \mathbb{B}^n , we set $C_u^n = \{c \in C^n \mid f(c) = u\}$ and $C_{u/\bar{u}}^n = C_u^n \cup C_{\bar{u}}^n$.

We define the binary relation $\Gamma_{u/\bar{u}}^n \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ as the set of pairs $(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ such that there exists $c \in C_{u/\bar{u}}^n$ that contains both x and y .

We define \mathcal{P}^n , the family of perfect fusion grids over \mathbb{Z}^n , as the set $\mathcal{P}^n =$

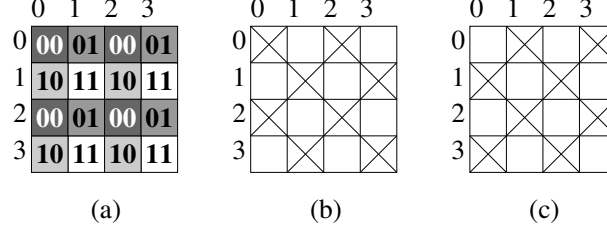


Fig. 17. Illustration of the two perfect fusion grids over \mathbb{Z}^2 (restricted to subsets of \mathbb{Z}^2). (a): The map f ; (b): $(\mathbb{Z}^2, \Gamma_{11/00}^2)$; (c): $(\mathbb{Z}^2, \Gamma_{10/01}^2)$.

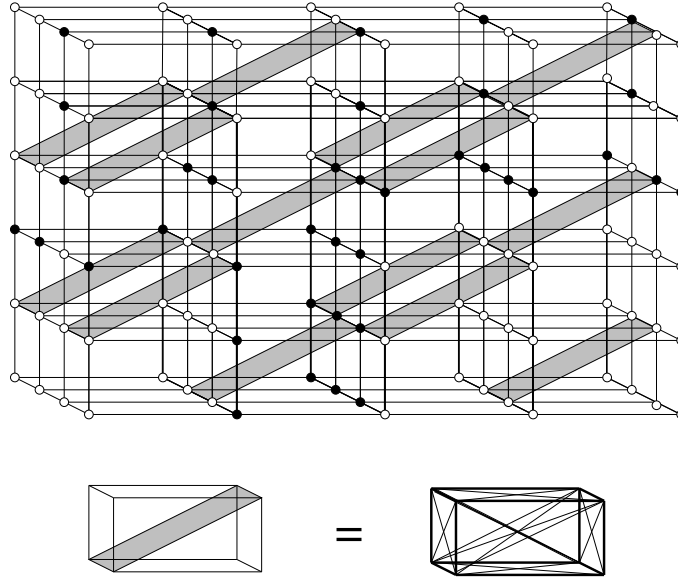


Fig. 18. A 3-dimensional perfect fusion grid. Black points constitute a set which is a watershed.

$$\{(\mathbb{Z}^n, \Gamma_{u/\bar{u}}^n) \mid u \in \mathbb{B}^n\}.$$

Fig. 17 illustrates the above definitions for the two-dimensional case. Fig. 18 shows a watershed on a 3-dimensional perfect fusion grid. To clarify the figure, we use the following convention: any two points belonging to a same cube marked by a gray stripe are adjacent to each other.

In the sequel, to simplify the notations, we will write c_i as a shortcut for $B(c)_i$.

Lemma 53. *Let $u \in \mathbb{B}^n$ and let $x \in \mathbb{Z}^n$.*

- i) There exists a unique c in C_u^n such that $x \in c$.
- ii) The point x is in exactly two maximal cliques of $(\mathbb{Z}^n, \Gamma_{u/\bar{u}}^n)$.

Proof: It may be easily seen that any element c of C_u^n which contains x is such that for any $i \in \{1, \dots, n\}$, $c_i = x_i - 1$ or $c_i = x_i$, hence i).

We deduce from i) that there are exactly two distinct elements c and c' of $C_{u/\bar{u}}^n$ such that $c \in C_u^n$, $c' \in C_{\bar{u}}^n$ and such that x is in both c and c' . Thus any element adjacent to x is either in c or in c' . >From the very definition of $\Gamma_{u/\bar{u}}^n$, any pair of elements of c (resp. c') is in $\Gamma_{u/\bar{u}}^n$. Thus c and c' are cliques of $(\mathbb{Z}^n, \Gamma_{u/\bar{u}}^n)$, which both contain x . Since any pair (y, y') with $y \in c \setminus c'$, $y' \in c' \setminus c$ is not in $\Gamma_{u/\bar{u}}^n$, we conclude that x is in exactly two maximal cliques. \square

Property 54. Let $u \in \mathbb{B}^n$ and let X be a finite subset of \mathbb{Z}^n such that $(X, \Gamma_{u/\bar{u}}^n)$ is connected. Then $(X, \Gamma_{u/\bar{u}}^n)$ is a perfect fusion graph. Furthermore it is a line graph.

Proof: >From Lem. 53, any x in X is in at most two maximal cliques. Thus, as a consequence of Prop. 51, $(X^n, \Gamma_{u/\bar{u}}^n)$ is a line graph and from Prop. 30 it is a perfect fusion graph. \square

The following property shows that the perfect fusion grid is “between” the usual adjacency relations on \mathbb{Z}^n .

Property 55. Let $u \in \mathbb{B}^n$. We have: $\Gamma_1^n \subseteq \Gamma_{u/\bar{u}}^n \subseteq \Gamma_n^n$.

Proof: >From Lem. 53, we know that for any $x \in \mathbb{Z}^n$ there exist exactly two maximal cliques $c \in C_u^n$ and $c' \in C_{\bar{u}}^n$ that contain x . Necessarily there exists k such that $B(c) = x - k$ with $k \in \mathbb{B}^n$ and $B(c') = x - \bar{k}$. A point x' is in $\Gamma_1^n(x)$ if there exists a unique $j \in \{1, \dots, n\}$ such that $x'_j = x_j + 1$ or $x'_j = x_j - 1$ and for any $i \in [\{1, \dots, n\} \setminus \{j\}]$, $x'_i = x_i$. Suppose that $x'_j = x_j - 1$. The case where $x'_j = x_j + 1$ is symmetric to this one and the following arguments hold for both cases. For any $i \in [\{1, \dots, n\} \setminus \{j\}]$, either $k_i = 0$ or $k_i = 1$. If $k_i = 0$, then $x'_i = x_i = c_i = c'_i + 1$. If $k_i = 1$, then $x'_i = x_i = c'_i = c_i + 1$. On the other hand, if $k_j = 1$ then $x'_j = x_j - 1 = c_j$, hence $x' \in c$. Otherwise, if $k_j = 0$ then $x'_j = x_j - 1 = c'_j$, hence $x' \in c'$. Whatever the case, $(x, x') \in \Gamma_{u/\bar{u}}^n$, hence $\Gamma_1^n \subseteq \Gamma_{u/\bar{u}}^n$. The proof of the second inclusion follows straightforwardly from the definition of $\Gamma_{u/\bar{u}}^n$. \square

Property 56. The family \mathcal{P}^n contains 2^{n-1} distinct perfect fusion grids.

Proof: From the very definition of perfect fusion grids, we have $\Gamma_{u/\bar{u}}^n = \Gamma_{\bar{u}/u}^n$. Furthermore, if $\{u, \bar{u}\} \neq \{v, \bar{v}\}$ then $\Gamma_{u/\bar{u}}^n \neq \Gamma_{v/\bar{v}}^n$. Since the cardinality of \mathbb{B}^n is equal to 2^n , the cardinality of \mathcal{P}^n is equal to $2^n/2 = 2^{n-1}$. \square

Let $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ and let $t \in \mathbb{B}^n$. We define $X + t = \{x + t \mid x \in X\}$, we say that $X + t$ is a *binary translation* of X . Let m be a positive integer such that

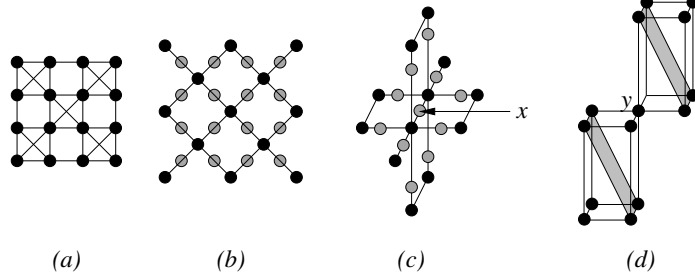


Fig. 19. Illustrations of the relation between line graphs of 1-connected graph and perfect-fusion grids. (a): a restriction of the 2-dimensional perfect fusion grid; (b): a graph (black points and edges) whose line graph is (a); the gray points indicate corresponding vertices of the line graph (a) of (b); (c): black points and edges depict a local configuration of the 3-dimensional 1-connected grid; the gray points indicate corresponding vertices of the line graph of (c) in which any gray point is adjacent to x ; (d): a local configuration of the perfect fusion grid, any black point is adjacent to y .

$m \leq n$. Remark that if X is an m -cube then $X + t$ is also an m -cube. The following property states that any two n -dimensional perfect fusion grids are equivalent up to a binary translation.

Property 57. *Let u and v in \mathbb{B}^n . Let $t \in \mathbb{B}^n$ such that for any $i \in \{1, \dots, n\}$, if $u_i = \bar{v}_i$ then $t_i = 1$, otherwise $t_i = 0$. Then for any $(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$, $(x, y) \in \Gamma_{u/\bar{u}}^n$ if and only if $(x + t, y + t) \in \Gamma_{v/\bar{v}}^n$.*

Proof: It can easily be seen that for any $c \in C^n$, $f(c) = u$ (resp. $f(c) = \bar{u}$) if and only if $f(c + t) = v$ (resp. $f(c + t) = \bar{v}$). The result follows from this observation and from the definition of the perfect fusion grids. \square

Let u in \mathbb{B}^2 . Let X be a finite subset of \mathbb{Z}^2 . It can be seen that $(E, \Gamma_{u/\bar{u}}^2)$ is the line graph of a graph (E', Γ_1^2) , with $E' \subset \mathbb{Z}^2$. For example, Fig. 19a shows a 2-dimensional perfect fusion grid, its associated graph (E', Γ_1^2) is depicted in Fig. 19b.

Remark that a similar statement is not true in dimension 3. Local configurations of $(\mathbb{Z}^3, \Gamma_1^3)$ and of its line graph are depicted in Fig. 19c. A local configuration of $(\mathbb{Z}^3, \Gamma_{u/\bar{u}}^3)$ is depicted in Fig. 19d. It can be checked that the point x in Fig. 19c has exactly 10 neighbors whereas the point y in Fig. 19d has 14 neighbors. Thus those two configurations cannot be isomorphic.

Conclusion

This article sets up a theoretical framework for the study of merging properties in graphs. Using this framework, we obtained a necessary and sufficient condition for the thinness of watersheds, we defined four classes of graphs in relation to these merging properties and gave local characterizations of these classes whenever possible. We also analyzed the status of the graphs which are the most widely used for image analysis, and proposed a family of graphs on \mathbb{Z}^n which constitute an ideal support for region merging.

A forthcoming article [8] extends this study to the case of weighted graphs, which constitute a model for grayscale images. In this study, the notion of degree of connectedness for grayscale images, introduced by A. Rosenfeld [14] will play an important role. The notion of topological watershed [3,5] extends the notion of watershed to weighted graphs, and possess interesting properties which are not guaranteed by most popular watershed algorithms [11]. The major outcomes of [8] are:

- i) a proof that any topological watershed on any perfect fusion graph is thin;
- ii) a new, simple and linear-time algorithm to compute topological watersheds on perfect fusion graphs.

References

- [1] L.W. Beineke. On derived graphs and digraphs. In H. Sachs, H.J. Voss, and H. Walther, editors, *Beiträge zur graphen theorie*, pages 17–23. Teubner, 1968.
- [2] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- [3] G. Bertrand. On topological watersheds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3):217–230, May 2005. Special issue on Mathematical Morphology.
- [4] S. Beucher and Ch. Lantuéjoul. Use of watersheds in contour detection. In *procs. Int Workshop on Image Processing Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*, 1979.
- [5] M. Couprie and G. Bertrand. Topological grayscale watershed transform. In *SPIE Vision Geometry V Proceedings*, volume 3168, pages 136–146, 1997.
- [6] M. Couprie, L. Najman, and G. Bertrand. Quasi-linear algorithms for the topological watershed. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3):231–249, May 2005. Special issue on Mathematical Morphology.
- [7] J. Cousty and G. Bertrand. Uniqueness of n-dimensionnal perfect fusion grid. 2006. In preparation.
- [8] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman, and G. Bertrand. Fusion graphs: grayscale watersheds and merging properties. 2006. In preparation.

-
- [9] J. Cousty, L. Najman, M. Couprie, and G. Bertrand. Watershed on edges. *Image and Vision Computing*, 2006. To be submitted, Special issue on ISMM05.
 - [10] F. Meyer and S. Beucher. Morphological segmentation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 1(1):21–46, 1990.
 - [11] L. Najman, M. Couprie, and G. Bertrand. Watersheds, mosaics and the emergence paradigm. *Discrete Applied Mathematics*, 147(2-3):301–324, April 2005. Special issue on DGCI.
 - [12] T. Pavlidis. *Structural Pattern Recognition*, volume 1 of *Springer Series in Electrophysics*, chapter 4–5, pages 90–123. Springer-Verlag, 1977. segmentation techniques.
 - [13] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *Journal of the Association for Computer Machinery*, 17:146–160, 1970.
 - [14] A. Rosenfeld. On connectivity properies of grayscale pictures. *Pattern Recognition*, 16:47–50, 1983.
 - [15] A. Rosenfeld and A.C. Kak. *Digital picture processing*, volume 2, chapter 10. Academic Press, 1982. Section 10.4.2.d (region merging).

Annex

Proof of Prop. 17: Since $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$ we have $A \cup \text{ann}(A) \neq E$, and since E is connected, from Cor. 2 there must exist a point x in $\Gamma^*(A \cup \text{ann}(A))$. Furthermore, x must be adjacent to at least one component B of \overline{X} distinct from A , otherwise $\text{ann}(A) \cup \{x\}$ would be W-simple for \overline{X} , a contradiction with the definition of $\text{ann}(A)$; and x cannot belong to B , otherwise $\text{ann}(A)$ would not be W-simple for \overline{X} , also a contradiction with the definition of $\text{ann}(A)$. \square

Proof of Prop. 22:

Suppose that $A \cup B \cup S \in \mathcal{C}(\overline{X} \setminus \overline{S})$. Let $C \in \mathcal{C}(\overline{X}|S)$, then $A \cup B \cup S \cup C$ is connected and $A \cup B \cup S \subseteq A \cup B \cup S \cup C \subseteq \overline{X} \setminus \overline{S}$. Since $\overline{X} \neq \emptyset$, as a connected component of \overline{X} the set C cannot be empty, and since $A \cup B \cup S \in \mathcal{C}(\overline{X} \setminus \overline{S})$, we must have either $C = A$ or $C = B$.

Suppose now that S is F-simple for X and adjacent to A and B . Thus, $A \cup B \cup S$ is connected, it remains to prove that it is maximal. Let $Z \subset E$ such that $A \cup B \cup S \subseteq Z \subseteq \overline{X} \setminus \overline{S}$, and Z connected. Let $Y = Z \setminus [A \cup B \cup S]$. Since $Z \subseteq \overline{X} \setminus \overline{S}$, we have $Y \subseteq \overline{X}$. Since A (resp. B) belongs to $\mathcal{C}(\overline{X})$, Y cannot be adjacent to A (resp. to B), and since $\mathcal{C}(\overline{X}|S) = \{A, B\}$, Y cannot be adjacent to S . Since Z is connected, by Prop. 1 we deduce that Y must be empty, thus $Z = A \cup B \cup S$, and $A \cup B \cup S$ is a component of $\overline{X} \setminus \overline{S}$. The other components of $\overline{X} \setminus \overline{S}$ are clearly the components of \overline{X} which differ from A and B . \square

Lemma 58. *Any strong fusion graph is a fusion graph.*

Proof: Let $G = (E, \Gamma)$ be a strong fusion graph, let $X \subset E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, and let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. By Prop. 17, there exists $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$, $B \neq A$, such that $A \cup \text{ann}(A)$ and B are neighbors. Since G is a strong fusion graph, there exists $S \subseteq [X \setminus \text{ann}(A)]$ such that $A \cup \text{ann}(A)$ and B can be merged through S for $X \setminus \text{ann}(A)$. Consider $S' = S \cup \text{ann}(A)$, it can easily be seen that S' is adjacent to exactly two components of \overline{X} , namely A and B , thus A can be merged for X . \square

Lemma 59. *Let (E, Γ) be a graph. Let $X \subseteq E$, let $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$, and let $Y \subseteq A$. Then, we have $\mathcal{C}(\overline{X \cup Y}) = [\mathcal{C}(\overline{X}) \setminus \{A\}] \cup \mathcal{C}(A \setminus Y)$.*

The proof is elementary. This lemma is useful in the following proof.

Proof of Prop. 34: We have to prove that any x in $X \cup Y$ cannot be W-simple. If $Y = \emptyset$ then $X \cup Y = X$ which is a watershed. Suppose from now that $Y \neq \emptyset$.

Let $x \in Y$. Since $Y \subset A$ and $Y \neq \emptyset$ and Y is a watershed, there exists $B, C \in \mathcal{C}(\overline{A \setminus Y})$ which are adjacent to x and by Lem. 59, B and C also belong to $\mathcal{C}(\overline{X \cup Y})$, thus x is not W-simple for $X \cup Y$.

Let $x \in X$. Since X is a watershed for E and G is a perfect fusion graph, by Th. 33, X is thin and thus x is adjacent to exactly two elements B, C of $\mathcal{C}(\overline{X})$. If $B \neq A$ and $C \neq A$ then from Lem. 59 we deduce that x is also F-simple for $X \cup Y$, suppose now that $B = A$ (the case $C = A$ is identical). If $\Gamma^*(x) \cap Y = \emptyset$ then x is adjacent to C and to a component of $A \setminus Y$, it is thus not W-simple for $X \cup Y$. Suppose now that there exists $y \in \Gamma^*(x) \cap Y$. Since Y is a watershed for A there exists two points a, b in $\Gamma^*(y)$ which belong to distinct components of $A \setminus Y$ (thus, a and b are not adjacent). Furthermore, $y \in \Gamma(x) \cap \Gamma(a) \cap \Gamma(b)$ and since G is a perfect fusion graph and by the converse of Th. 41(viii), x must be adjacent to either a or b . Hence, x is not W-simple. \square

Annexe B

Weighted fusion graphs : merging properties and watersheds

J. Cousty, M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand.
Soumis pour publication en revue.

Weighted fusion graphs: merging properties and watersheds

Jean Cousty, Michel Couprie, Laurent Najman and
Gilles Bertrand

Université Paris-Est, LABINFO-IGM, UMR CNRS 8049, A2SI-ESIEE, France

Abstract

This paper deals with mathematical properties of watersheds in weighted graphs linked to region merging methods, as used in image analysis.

In a graph, a cleft (or a binary watershed) is a set of vertices that cannot be reduced, by point removal, without changing the number of regions (connected components) of its complement. To obtain a watershed adapted to morphological region merging, it has been shown that one has to use the topological thinnings introduced by M. Couprie and G. Bertrand. Unfortunately, topological thinnings do not always produce thin clefts.

Therefore, we introduce a new transformation on vertex weighted graphs, called C-watershed, that always produces a cleft. We present the class of perfect fusion graphs, for which any two neighboring regions can be merged, while preserving all other regions, by removing from the cleft the points adjacent to both. An important theorem of this paper states that, on these graphs, the C-watersheds are topological thinnings and the corresponding divides are thin clefts. We propose a linear-time immersion-like monotone algorithm to compute C-watersheds on perfect fusion graphs, whereas, in general, a linear-time topological thinning algorithm does not exist. Finally, we derive some characterizations of perfect fusion graphs based on thinness properties of both C-watersheds and topological watersheds.

Key words: Graph theory, regions merging, watershed, fusion graphs, image segmentation, image processing

Email addresses: `j.cousty@esiee.fr` (Jean Cousty), `m.couprie@esiee.fr` (Michel Couprie), `l.najman@esiee.fr` (Laurent Najman), `g.bertrand@esiee.fr` (Gilles Bertrand).

Preprint submitted to Elsevier

21 August 2007

Introduction

Image segmentation is the task of delineating objects of interest that appear in an image. In many cases, the result of such a process, also called a segmentation, can be viewed as a set of connected regions lying in a background which constitutes the separation between regions. In order to define regions, an image is often considered as a graph whose vertex set is made of the pixels and whose edge set is given by an adjacency relation between them. For instance, with the well-known 8-adjacency relation [1] each vertex is adjacent to its 8 closest neighbors. Then, the regions are simply the connected components of the set of foreground pixels. A popular approach to image analysis, called region merging [2,3], consists of progressively merging pairs of regions, starting from an initial segmentation that contains too many regions.

Given a grayscale image, or more generally a vertex-weighted graph (*i.e.*, a graph and a map that assigns a scalar value to each vertex), how is it possible to obtain an initial segmentation for a region merging procedure? The watershed transform [4–8] is a powerful tool for solving this problem. Let us consider a 2D grayscale image as a topographical relief, where the dark pixels correspond to basins and valleys, whereas bright pixels correspond to hills and crests. Suppose that we are interested in segmenting “dark” regions. Intuitively, the watersheds of an image are constituted by the crests which separate the basins corresponding to regional minima. This notion is illustrated in Fig. 1, where the white points in Fig. 1c constitute a watershed of the image in Fig. 1a equipped with the 8-adjacency relation. Due to noise and texture, real-world images often have a huge number of regional minima, hence the “mosaic” aspect of Fig. 1c. Nevertheless, it has been shown in numerous applications that this segmentation is an interesting starting point for a region merging process (see, *e.g.*, [9–11]).

In order to identify the next pair of neighboring regions to be merged, many methods are based on the values of the points that belong to the initial separation between regions. In particular, in mathematical morphology, several methods [12–14] are implicitly based on the assumption that the initial separation satisfies a fundamental constraint: the values of the points in the separation must convey a notion of contrast, called connection value, between the minima of the original image. The connection value between two minima A and B is the minimal value k such that there exists a path from A to B the maximal value of which is k . From a topographical point of view, this value can be intuitively interpreted as the minimal altitude that a global flooding of the relief must reach in order to merge the lakes that flood A and B .

In the topological approach to the watershed [8,15–17], we consider a transformation that iteratively lowers the value of a map F while preserving some

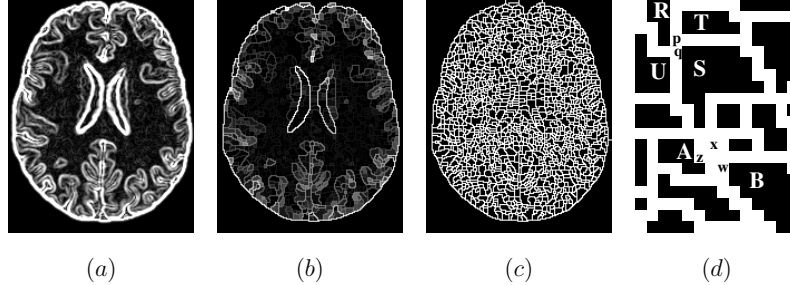


Fig. 1. (a): Original image (cross-section of a brain, after applying a gradient operator); (b): a topological watershed of (a) with the 8-adjacency; (c): the divide X (white points) of the topological watershed shown in b; (d): a zoom on a part of c. The point x is interior for X and w and z are adjacent to a unique connected component of \overline{X} .

topological properties, namely the number of connected components of each lower threshold of F . This transform and its result are called *W-thinning*; a *topological watershed* being a minimal *W-thinning*. This notion is illustrated in Fig. 1 where the map H (Fig. 1b) is a topological watershed of F (Fig. 1a) equipped with the 8-adjacency relation. The *divide* of a map is the set of points that do not belong to any regional minimum (see the divide of H in Fig. 1c). It has been proved in [15,17] that the values of the points in the divide of a *W-thinning* convey the connection value between the minima of the original map. More remarkably, any set of points that verifies this property can be obtained by a *W-thinning*. Therefore, the divide of a *W-thinning* is a good choice for the initial segmentation in many region merging methods.

The divide of a *W-thinning*, and, in particular, of a topological watershed is not necessarily thin. Firstly, we observe that the divide of a topological watershed can contain some points adjacent to a unique connected component of its complement (see points w and z in Fig. 1d, which depicts a zoom on a part of Fig. 1c). Secondly, it may also contain some *inner* points, *i.e.*, points that are not adjacent to any point outside the divide (see point x in Fig. 1d). For implementing region merging schemes, these two kinds of thickness are problems. For instance, in Fig. 1d, regions A and B could hardly be considered as “candidate” to be merged since there is no point in the divide which is adjacent to both.

To solve the first problem, we want any divide to be a *cleft*, that is a set of vertices that does not contain any point adjacent to a unique connected component of its complement. In the case of an image, this notion corresponds to the intuitive idea of a frontier that separates connected regions. However, in general, a *cleft* is not necessarily thin. It can indeed contain some inner points and thus the second problem remains. In [18,19], we provide a framework to

study the properties of thinness of clefts in any kind of graph, and characterize the class of graphs in which any cleft is thin. This class is strongly linked to a merging property. If we want to merge a pair of neighboring regions, what happens if each point adjacent to these two regions is also adjacent to a third one, which is not wanted in the merging? Fig. 1d illustrates such a situation, where R and S are neighbor and where p is adjacent to regions R, S, T and q to R, S, U . A major contribution of [19] is the definition and the study of four classes of graphs, with respect to the possibility of “getting stuck” in a merging process. In particular, we say that a graph is a *perfect fusion graph* if any two neighboring regions can be merged, while preserving all other regions, by removing from the divide the points adjacent to both.

Let us now turn back to W-thinnings in vertex weighted graphs. Are the divides of topological watersheds always thin clefts on perfect fusion graphs? In this paper, we show that this is indeed true (Th. 18). This constitutes one of our main results. In addition, the paper also contains the following contributions:

- we introduce a notion of thinness for maps and characterize, thanks to a merging property, the class of graphs in which any topological watershed is thin (Th. 9);
- we introduce a transformation, called C-watershed, that necessarily produces a map whose divide is a cleft. We give a local characterization (Th. 17) of the class of graphs in which any C-watershed is a W-thinning and deduce Th. 18 from this characterization;
- we introduce a linear-time immersion-like monotone algorithm to compute C-watersheds on perfect fusion graphs, whereas, in general, a linear-time W-thinning algorithm does not exist;
- finally, we derive some characterizations of perfect fusion graphs based on thinness properties of both C-watersheds and topological watersheds (Prop. 21).

This paper extends a preliminary version published in a conference [20]. It includes the proofs of the properties presented in [20] and two original theorems (Th. 9 and Th. 17).

1 Clefts and fusion graphs

1.1 Basic notions and notations

In this paper E stands for a finite nonempty set. We denote by $|E|$ the number of elements of E and by 2^E the set composed of all the subsets of E . Let $X \subseteq E$, we write \bar{X} the complementary set of X in E , *i.e.*, $\bar{X} = E \setminus X$.

We define a graph as a pair (E, Γ) where E is a finite set and Γ is a binary relation on E (i.e., $\Gamma \subseteq E \times E$), which is reflexive (for all x in E , $(x, x) \in \Gamma$) and symmetric (for all x, y in E , $(y, x) \in \Gamma$ whenever $(x, y) \in \Gamma$). Each element of E (resp. Γ) is called a *vertex* or a *point* (resp. an *edge*). We will also denote by Γ the map from E to 2^E such that, for all $x \in E$, $\Gamma(x) = \{y \in E \mid (x, y) \in \Gamma\}$. If $y \in \Gamma(x)$, we say that y is *adjacent to* x . We denote by Γ^* the binary relation on E defined by $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{(x, x) \mid x \in E\}$. Let $X \subseteq E$, we define $\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$, and $\Gamma^*(X) = \Gamma(X) \setminus X$. If $y \in \Gamma(X)$, we say that y is *adjacent to* X . If $X, Y \subseteq E$ and $\Gamma(X) \cap Y \neq \emptyset$, we say that Y is *adjacent to* X .

Let $G = (E, \Gamma)$ be a graph and let $X \subseteq E$, we define the *subgraph of G induced by X* as the graph $G_X = (X, \Gamma \cap [X \times X])$. In this case, we also say that G_X is a *subgraph of G* . Let $G' = (E', \Gamma')$ be a graph, we say that G and G' are *isomorphic* if there exists a bijection f from E to E' such that, for all $x, y \in E$, y belongs to $\Gamma(x)$ if and only if $f(y)$ belongs to $\Gamma'(f(x))$.

Let (E, Γ) be a graph and let $X \subseteq E$. A *path (of length l) in X* is a sequence $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ such that $x_i \in X$, $i \in [0, l]$, and $x_i \in \Gamma(x_{i-1})$, $i \in [1, l]$. We also say that π is a *path from x_0 to x_l in X* and that x_0 and x_l are *linked for X* . We say that X is *connected* if any x and y in X are linked for X .

Important Remark. From now, (E, Γ) denotes a graph, and we furthermore assume for simplicity that E is connected.

Notice that, nevertheless, the subsequent definitions and properties may be easily extended to non-connected graphs.

Let $X \subseteq E$ and $Y \subseteq X$. We say that Y is a *(connected) component of X* , or simply a *component of X* , if Y is connected and if Y is maximal for this property, i.e., if $Z = Y$ whenever $Y \subseteq Z \subseteq X$ and Z connected. We denote by $\mathcal{C}(X)$ the set of all connected components of X .

1.2 Clefts

In a graph, a *cleft* is a set of vertices which cannot be reduced without changing the number of connected component of its complementary set. In image analysis, this notion corresponds to the intuitive idea of a frontier that separates connected regions. Therefore, many segmentation algorithms expect to compute a cleft.

Definition 1 (cleft) Let $X \subseteq E$ and let $x \in X$. We say that x is *unconnected for X* if x is adjacent to exactly one component of \overline{X} . The set X is a *cleft* if there is no unconnected point for X .

In Fig. 2a, y is unconnected for the set constituted by the black vertices, whereas x is not. Observe that the set Y of black points in Fig. 2b is a cleft since it contains no unconnected point for Y . On the contrary, the bold sets in Figs. 2a and c are not clefts.

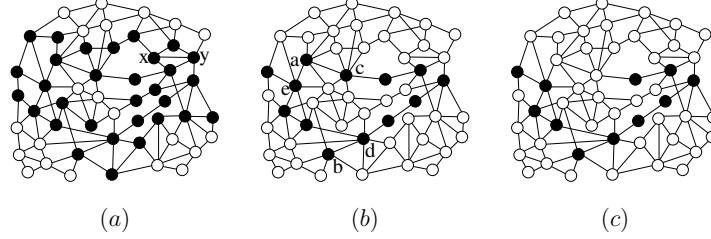


Fig. 2. (a): A graph (E, Γ) and a subset X (black points) of E ; (b): the set Y of black points is a cleft; (c): the set obtained after merging two components of \bar{Y} through the set $\{a, c\}$.

Definition 2 (thin set) Let $X \subseteq E$ and let $x \in X$. We say that x is an inner point for X if x is not adjacent to \bar{X} . The interior of X is the set of all inner points for X , denoted by $\text{int}(X)$. If $\text{int}(X) = \emptyset$, we say that X is thin.

For example, the point x in Fig. 2a is an inner point for the set of black vertices. In Fig. 3a, the set of black vertices is thin whereas the set made of black and gray points is not thin: its interior, depicted in gray, is not empty. However, observe that this set is a cleft since it does not contain any unconnected point.

Important Remark. In previous papers [15,19,20] by the same authors the notion of cleft was called *(binary) watershed*. For the sake of clarity, we chose, in this paper, to keep the term of watershed only for the notion of topological watershed. Note also that, in previous references [8,15,17,16,19,20], unconnected points were called *W-simple points*.

1.3 Fusion Graphs

The theoretical framework set up in [18,19] enables to study the properties of region merging methods in graphs, as used in image analysis. In particular, one of the most striking outcomes of [19] links region merging properties and a thinness property of clefts.

In the following definition the prefix “F-” stands for fusion.

Let $X \subseteq E$. Let $x \in X$, we say that x is *F-simple (for X)*, if x is adjacent to exactly two components of \bar{X} . Let $S \subseteq X$. We say that S is *F-simple (for X)*

if S is adjacent to exactly two components $A, B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that $A \cup B \cup S$ is connected.

Let us look at Fig. 2b. The set made of the black vertices separates its complementary set into four components. The points a and c are F-simple for the black vertices whereas b and d are not. The sets $\{a, c, e\}$ and $\{c, e\}$ are F-simple and the sets $\{b, d\}$ and $\{a, c, b\}$ are not. Let X be a set that separates its complementary \overline{X} into k components. If we remove from X an F-simple set, then we obtain a set that separates its complementary into $k - 1$ components. For instance, if we remove from the black vertices in Fig. 2b the F-simple set $\{a, c\}$ or $\{c, e\}$, then we obtain a new set that separates its complementary into three components (see Fig. 2c). This operation may be seen as an elementary merging in the sense that only two components are merged.

Let $X \subseteq E$ and let A and B be two elements of $\mathcal{C}(\overline{X})$ with $A \neq B$. We say that A and B can be merged (for X) through S if S is F-simple and A and B are precisely the two components of \overline{X} adjacent to S . We say that A can be merged (for X) if there exists $B \in \mathcal{C}(\overline{X})$ and $S \subseteq X$ such that A and B can be merged through S .

Definition 3 (fusion graph) *We say that (E, Γ) is a fusion graph if for any subset of vertices $X \subseteq E$ such that $|\mathcal{C}(\overline{X})| \geq 2$, any component of \overline{X} can be merged.*

Notice that all graphs are not fusion graphs. For instance, the graph depicted in Fig. 3a is not a fusion graph: none of the components of the complementary set of the black vertices can be merged. On the other hand, it can be verified that the graph depicted in Fig. 3b is an example of a fusion graph.

Let A and B be two subsets of E . We set $\Gamma^*(A, B) = \Gamma^*(A) \cap \Gamma^*(B)$ and if $\Gamma^*(A, B) \neq \emptyset$, we say that A and B are neighbors.

Definition 4 (perfect fusion graph) *We say that (E, Γ) is a perfect fusion graph if, for any $X \subseteq E$, any neighbors A and B in $\mathcal{C}(\overline{X})$ can be merged through $\Gamma^*(A, B)$.*

In other words, the perfect fusion graphs are the graphs in which merging two neighboring regions can always be performed by removing from the frontier set all the points which are adjacent to both regions. This class of graphs permits, in particular, to rigorously define hierarchical schemes based on region merging and to implement them in a straightforward manner. It has been shown [19] that any perfect fusion graph is a fusion graph and that the converse is not true.

In image analysis, there are two fundamental adjacency relations defined over \mathbb{Z}^2 . The 4-adjacency, denoted by Γ_4 , is defined by: $\forall x, y \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \in \Gamma_4$

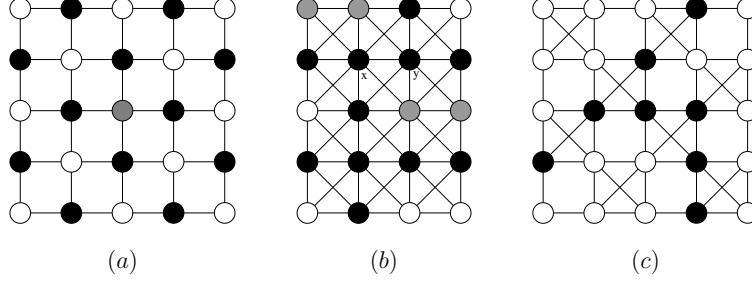


Fig. 3. (a): A graph induced by the 4-adjacency relation; a cleft X (black vertices) for which none of the components of \bar{X} can be merged; a cleft Y (gray and black vertices) which is not thin, its interior is depicted in gray. (b): A graph induced by the 8-adjacency relation; a cleft X (black vertices); in gray two components of \bar{X} , A and B , which are neighbors and cannot be merged through $\Gamma^*(A, B) = \{x, y\}$; (c): A graph induced by one of the two perfect fusion grids over \mathbb{Z}^2 and a cleft (black vertices).

iff $|x_1 - y_1| + |x_1 - y_2| \leq 1$, where $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$. The 8-adjacency, denoted by Γ_8 is defined by: $\forall x, y \in \mathbb{Z}^2, (x, y) \in \Gamma_8$ iff $\max\{|x_1 - y_1|, |x_1 - y_2|\} \leq 1$. Examples of graphs induced by the 4- and 8-adjacency are shown in respectively Figs. 3a and b.

The graphs induced by the 4-adjacency are not in general fusion graphs (see, for instance, the counter-example of Fig. 3a). On the contrary, the graphs induced by the 8-adjacency are fusion graphs (see Prop. 48 in [19]). Nevertheless, in general, they are not perfect fusion graphs. Consider for instance the graph induced by the 8-adjacency depicted in Fig. 3b and the set Y made of the black vertices. The two components of \bar{Y} , depicted in gray, are neighbors since the points x and y are adjacent to both but they cannot be merged. In [19] the authors introduce a family of adjacency relations on \mathbb{Z}^n , which can be used in image processing, that induce perfect fusion graphs. For instance, the graph depicted in Fig. 3c is induced by one of the two perfect fusion grids over \mathbb{Z}^2 .

The following theorem, which is a fundamental result of [19], establishes the links between fusion graphs and thin clefts.

Theorem 5 (33 in [19]) *A graph G is a fusion graph if and only if any cleft X in G , such that $|\mathcal{C}(\bar{X})| \geq 2$, is thin.*

The four following necessary and sufficient conditions for perfect fusion graphs show the relation existing between perfect fusion graphs, fusion graphs and a sub-class of thin clefts.

We denote by G^\blacktriangle the graph of Fig. 4a.



Fig. 4. Two graphs used in Th. 6 and Th. 17.

Theorem 6 (from 41 in [19]) *The five following statements are equivalent:*

- i) (E, Γ) is a perfect fusion graph;
- ii) the graph G^\blacktriangle is not a subgraph of (E, Γ) ;
- iii) for any cleft X in E such that $\mathcal{C}(X) \geq 2$, each point x in X is F -simple for X ;
- iv) for any connected subset A of E , the subgraph of (E, Γ) induced by A is a fusion graph;
- v) for any $x \in E$, any $X \subseteq \Gamma(x)$ contains at most two connected components.

2 W-thinnings and topological watersheds

As seen in the introduction, the watershed transform [5–8] of a grayscale image, or more generally of a vertex-weighted graph, produces a set of connected regions separated by a divide. Such a divide has often been used, in image analysis, as an entry point for region merging methods. In this section we recall the definitions of W-thinnings and topological watersheds [8,15].

Let k_{\min} and k_{\max} be two elements of \mathbb{Z} such that $k_{\min} < k_{\max}$. We set $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{Z}; k_{\min} \leq k < k_{\max}\}$ and $\mathbb{K}^+ = \mathbb{K} \cup \{k_{\max}\}$. We denote by $\mathcal{F}(E)$ the set composed of all maps from E to \mathbb{K} .

Let $F \in \mathcal{F}(E)$. If $x \in E$, $F(x)$ is called the *altitude* of x . Let $k \in \mathbb{K}^+$. We denote by $F[k]$ the set $\{x \in E; F(x) \geq k\}$ and by $\overline{F}[k]$ its complementary set; $F[k]$ is called an *upper section* of F and $\overline{F}[k]$, a *lower section* of F . A connected component of $\overline{F}[k]$ which does not contain a connected component of $\overline{F}[k-1]$ is a (*regional*) *minimum* of F . We denote by $M(F) \subseteq E$ the set of all points which are in a minimum of F . We say that $M(F)$ is the *divide* of F . A subset X of E is *flat* for F if any two points x, y in X are such that $F(x) = F(y)$. If X is flat for F , the *altitude* of X is the altitude of any point of X .

By the mean of upper sections, the definitions of unconnected points and clefts can be extended to the case of maps [8,15–17].

Let $F \in \mathcal{F}(E)$. The lowering of F at x , denoted by $[F \setminus x]$, is the map in $\mathcal{F}(E)$

such that:

- $[F \setminus x](x) = F(x) - 1$; and
- $[F \setminus x](y) = F(y)$ for any $y \in E \setminus \{x\}$.

Definition 7 (watershed) Let $F \in \mathcal{F}(E)$. Let $x \in E$ and $k = F(x)$. We say that x is *W-destructible* for F if x is unconnected for $F[k]$.

If there is no *W-destructible* point for F we say that F is a (topological) watershed.

Let $H \in \mathcal{F}(E)$. We say that H is a *W-thinning* of F if:

- i) $H = F$; or if:
- ii) there exists a *W-thinning* $I \in \mathcal{F}(E)$ of F such that H is the lowering of I at a *W-destructible* point for I .

If H is both a *W-thinning* of F and a watershed, we say that H is a (topological) watershed of F .

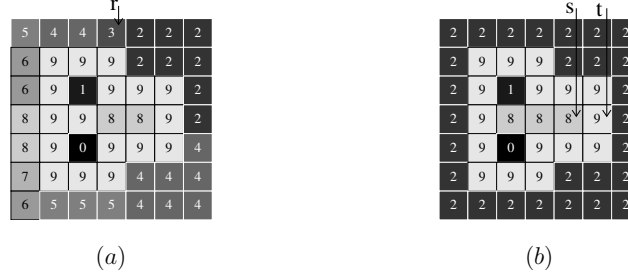


Fig. 5. The depicted images are equipped with the 8-adjacency relation. (a): A map F ; (b): a topological watershed of F .

In Fig. 5a and b, assume that the images are equipped with the 8-adjacency relation. In both Fig. 5a and b, it may be seen that there are three minima which are the components with levels 0,1 and 2. In Fig. 5a, the point labeled r is *W-destructible*. In Fig. 5b, no point is *W-destructible*. The map depicted in Fig. 5b is a topological watershed of the map in Fig. 5a.

The divide of a topological watershed constitutes an interesting image segmentation [15,17] which possesses important properties not guaranteed by most watershed algorithms [5,6]. In particular, it preserves the connection value between the minima of the original map; intuitively, the connection value (see [15,17,21,22]) between two minima can be thought of as the minimal altitude at which one need to climb in order to reach one minimum from the other. It has been shown (Th. 7 in [15]) that a topological watershed can be equivalently defined as a transformation which extends the lower sections (and hence the minima) of the original map as much as possible while preserving the connection value between all pairs of minima. As said in the introduction, this contrast preservation property is a fundamental property on which rely many popular region merging methods based on watersheds [12,14,13].

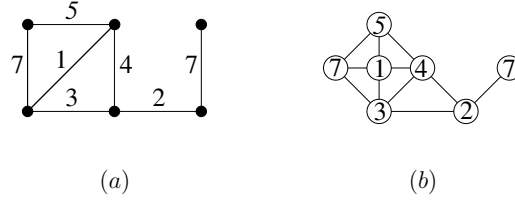


Fig. 6. (a): A graph G . The values constitute a map F that weights the edges of G . (b): A graph G' that is the line graph of G . The map F weights the vertices of G' .

In image analysis applications, we sometimes deal with graphs whose edges, rather than vertices, are weighted by a cost map [23–27]. To finish this section, we recall the definition of *line graphs*. This class of graphs allows us to highlight that the approaches of watershed and region merging based on edge-weighted graphs are particular cases of the approaches based on vertex-weighted graphs developed in this paper.

The *line graph* of (E, Γ) is the graph (E', Γ') such that $E' = \Gamma^*$ and (u, v) belongs to Γ' whenever $u \in \Gamma^*$, $v \in \Gamma^*$, $u \neq v$ and u, v share a common vertex of E .

We say that the graph (E', Γ') is a line graph if there exists a graph (E, Γ) such that (E', Γ') is isomorphic to the line graph of (E, Γ) .

For instance, the graph depicted in Fig. 6b is the line graph of the one depicted in Fig. 3a. It has been proved [19] that any line graph is a perfect fusion graph and that the converse is not true. Thus, all definitions, properties and algorithm for watershed on perfect fusion graphs developed in Secs. 4 and 3 also hold for watershed approaches based on edge-weighted graphs. A more detailed presentation of watersheds in edge-weighted graphs can be found in [26,27].

3 Thinness of topological watersheds

The divides produced by watershed algorithms [5–7], and in particular by topological watershed algorithms [16], are not always clefts and can sometimes be thick, even on fusion graphs. Consider, for instance, the digital image F depicted in Fig. 5b and assume that it is equipped with the graph induced by the 8-adjacency. Although the map F is a topological watershed and the considered graph is a fusion graph (see Prop. 48 in [19]), the point labeled s is inner for $\overline{M(F)}$. As said in the introduction, such thickness is a problem for defining and implementing region merging schemes. In Sec. 1.3, we presented a result of [19] which characterizes, thanks to a merging property, the class of graphs in which any cleft is thin (Th. 5). In this section, we provide a similar

result for the case of topological watersheds.

To this end, we introduce a notion of thinness for maps which extends the one for sets by the mean of upper sections.

Definition 8 (thin map) *Let $F \in \mathcal{F}(E)$, let $x \in E$ and $k = F(x)$. We say that x is an inner point for F if x is inner for $F[k]$. The interior of F , denoted by $\text{int}(F)$, is the set of points in $\overline{M(F)}$ that are inner for F . We say that F is thin if $\text{int}(F) = \emptyset$.*

In other words, a point is inner for a map if all its neighbors have an altitude greater than or equal to its own altitude. Thus, a map is thin if any point in its divide has at least one neighbor of strictly lower altitude. It may be seen that the topological watershed depicted in Fig. 8b is thin whereas the one in Fig. 5b is not.

From the very definition of a topological watershed and thanks to Th. 5, it may be seen that any graph in which all topological watersheds are thin is necessarily a fusion graph. The map in Fig. 5b shows that, contrarily to the case of clefts (Th. 5), the converse is, in general, not true. However, as established by the following characterization theorem, deep links exist between these two classes of graphs.

Theorem 9 *Any grayscale topological watershed in (E, Γ) is thin if and only if for any cleft $X \subseteq E$, for any $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$, the subgraph of (E, Γ) induced by A is a fusion graph.*

The proof of Th. 9 can be found in annex.

We remark that the above condition, that characterizes the graphs in which any topological watershed is thin, is a weakening of condition *iv* of Th. 6 which characterizes the perfect fusion graphs. Thus, any topological watershed on a perfect fusion graph is thin. On the other hand, there exists some graphs which are not perfect fusion graphs and in which any topological watershed is thin (see for instance Fig. 7).

In image analysis, a cleft (Sec. 1.2) can be seen as a frontier between connected regions and the divide of a topological watershed constitutes an interesting segmentation (Sec. 2). Therefore, a desirable property is that the divide of a topological watershed is a cleft. Unfortunately, such a property does not hold even in the case of a graph in which any topological watershed is thin. Consider, for instance, the graph (E, Γ) and the topological watershed F depicted in Fig. 7a. It may be verified, thanks to Th. 9, that in (E, Γ) any topological watershed is thin; this is, in particular, the case of F . However, it may be checked that the points which are bold circled are unconnected for the divide of F . Hence $\overline{M(F)}$ is not a cleft. Observe also that the black vertex is inner (in

the sense of Def. 2) for $\overline{M(F)}$ and thus that $\overline{M(F)}$ is not thin. Thus, the notion of thinness defined in this section does not lead to topological watersheds adapted for region merging schemes. In the next sections, we study watersheds in perfect fusion graphs and show that this kind of problems cannot happen.

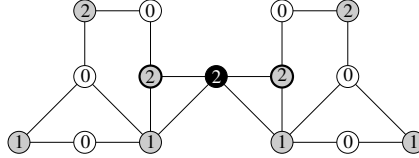


Fig. 7. A graph in which any topological watershed is thin. The values define a map that is a topological watershed. The black point is inner for the divide in the sense of Def. 2. The circled points are unconnected for the divide.

4 C-watersheds in perfect fusion graphs

In this section, we introduce a new grayscale transformation, called *C-watershed*, that always produces a map whose divide is a cleft. An important result (Th. 13) is that, on a perfect fusion graph, any C-watershed of a map is a W-thinning of this map whose divide is a thin cleft. Furthermore, we propose and prove the correctness of a linear time algorithm to compute C-watersheds on perfect fusion graphs.

Definition 10 Let $F \in \mathcal{F}(E)$ and let $x \in E$. We say that x is a cliff point (for F) if x is unconnected for $\overline{M(F)}$. We say that x is M-cliff (for F) if x is a cliff point of minimal altitude (i.e., $F(x) = \min\{F(y) \mid y \in E \text{ is a cliff point for } F\}$).

In other words, a cliff point for a map $F \in \mathcal{F}(E)$ is a point in $\overline{M(F)}$ which is adjacent to a single minimum of F . A point x is M-cliff for F if no other point of $\overline{M(F)}$ adjacent to a single minimum has an altitude strictly lower than the altitude of x .

In Fig. 8a, the points at altitude 3 are cliff points and the bold circled point is the only M-cliff point. In Figs. 8b,c and d, it can be seen that there is no M-cliff point and no cliff point.

Let $F \in \mathcal{F}(E)$. Let x be a W-destructible point. Let $j \in \mathbb{K}$. The point x is W-destructible with lowest value j (for F) if for any $h \in \mathbb{K}$ such that $j < h \leq F(x)$, x is unconnected for $F[h]$ and if x is not unconnected for $F[j]$.

Lemma 11 Let $F \in \mathcal{F}(E)$. Let $x \in E$ be M-cliff for F and let $l \in \mathbb{K}$ be the

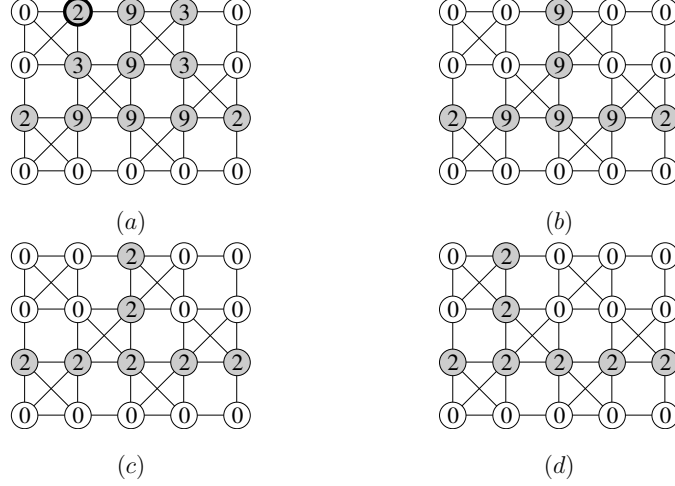


Fig. 8. Example of maps on perfect fusion graphs, the minima are in white; (a): the bold circled vertex is M-cliff; (b): a C-watershed of (a); (c): a topological watershed of both (a) and (b); (d): a topological watershed of (a).

level of the only minimum adjacent to x . If (E, Γ) is a perfect fusion graph then x is W -destructible with lowest value l for F .

The proof of Lem. 11 can be found in Annex 7.2.

Remark that on non-perfect fusion graphs, the points which are M-cliff are not necessarily W -destructible. Indeed, it can be verified that the graph of Fig. 7 is not a perfect fusion graph and that any of the circled vertices is an M-cliff point that is not W -destructible.

Lem. 11 invites us to investigate a particular kind of W -thinning which consists of iteratively lowering the values of M-cliff points.

Let $F \in \mathcal{F}(E)$ and $h \in \mathbb{K}$, we denote by $[F_{x,h}]$ the map in $\mathcal{F}(E)$ such that $[F_{x,h}](x) = h$ and $[F_{x,h}](y) = F(y)$ for any $y \in E \setminus \{x\}$.

Definition 12 Let F and H be in $\mathcal{F}(E)$. We say that H is a C-thinning of F if:

- i) $H = F$, or if
- ii) there exists a map I that is a C-thinning of F and there exists a point x M-cliff for I such that $H = [I_{x,\ell}]$, where ℓ is the altitude of the only minimum of I adjacent to x .

We say that F is a C-watershed if there is no M-cliff point for F . If H is both a C-thinning of F and a C-watershed, we say that H is a C-watershed of F .

It follows from Lem. 11, Def. 10 and Def. 12 that on a perfect fusion graph any C-thinning of a map is a W-thinning of this map. Furthermore, a map is a C-watershed if and only if its divide is a cleft. Indeed, a map is a C-watershed iff it has no M-cliff point hence no cliff point and thus, by definition, no unconnected point for its divide. Any perfect fusion graph is a fusion graph. Therefore, by Th. 5, any cleft on a perfect fusion graph is thin. Hence, we deduce the following theorem which establishes that the divides of the C-watersheds constitute interesting segmentations in perfect fusion graphs.

Theorem 13 *Let F be a map in $\mathcal{F}(E)$ and suppose that (E, Γ) is a perfect fusion graph.*

Let H be a C-watershed of F . Then, H is a W-thinning of F . Furthermore, the divide of H is a thin cleft.

To illustrate the previous theorem, let us look at Fig. 8. The map H depicted in (b) is a C-watershed of the map F depicted in (a). It can be verified that H is a W-thinning of F and that the divide of H is a thin cleft. In general, a C-watershed is not a topological watershed. For instance, the map H is a C-watershed, but the points at altitude 9 are W-destructible. Nevertheless, as implied by the following property, the divide of any C-watershed of F is equal to the divide of a topological watershed of F .

A W-thinning of $F \in \mathcal{F}(E)$ is a *lowering* (i.e., a map H such that for any $x \in E$, $H(x) < F(x)$) of F which preserves the number of components of all lower sections of F . In particular, it preserves the number of minima of F . By the preceding theorem, the divide of any C-watershed is a cleft. Hence, the minima of a C-watershed cannot be further “extended” while preserving all of them. As a consequence, we deduce the following property.

Property 14 *Let $F \in \mathcal{F}(E)$ be a C-watershed. The divide of any W-thinning of F is equal to the divide of F .*

The algorithms to compute (the divide of) a topological watershed [16] are not linear and require the computation of an auxiliary data structure called component tree [28]. It is possible to reach a better complexity for the computation of a C-watershed on a perfect fusion graph.

In a C-thinning sequence, the points which are in a minimum at a given step never become M-cliff further in the sequence. This observation leads us to the definition of Algorithm 1, a very simple algorithm for C-watersheds.

At each iteration of the main loop (line 6) of Algorithm 1, it may be seen that any point adjacent to a unique minimum of F is in the set L . Thus, it may be easily deduced that at each iteration of the main loop, F is a C-thinning (hence, by Lem. 11, a W-thinning) of the input map.

At the end of Algorithm 1, the set L is empty. Thus there is no point adjacent

Algorithm 1: C-watershed

Data: a perfect fusion graph (E, Γ) , a map $F \in \mathcal{F}(E)$ **Result:** F

```
1  $L := \emptyset; K := \emptyset;$ 
2 Attribute distinct labels to all minima of  $F$  and label the points of  $M(F)$ 
  with the corresponding labels;
3 foreach  $x \in E$  do
4   if  $x \in M(F)$  then  $K := K \cup \{x\};$ 
5   else if  $x$  is adjacent to  $M(F)$  then  $L := L \cup \{x\}; K := K \cup \{x\};$ 
6 while  $L \neq \emptyset$  do
7    $x :=$  an element of  $L$  with minimal altitude for  $F$ ;
8    $L := L \setminus \{x\};$ 
9   if  $x$  is adjacent to exactly one minimum of  $F$  then
10    Set  $F[x]$  to the altitude of the only minimum of  $F$  adjacent to  $x$ ;
11    Label  $x$  with the corresponding label;
12    foreach  $y \in \Gamma^*(x) \cap \overline{K}$  do  $L := L \cup \{y\}; K := K \cup \{y\};$ 
```

to a unique minimum of F , in other words, there is no point M-cliff or cliff for F . As a consequence of the preceding remarks, at the end of Algorithm 1, the map F is a C-watershed of the input map.

In Algorithm 1, the operations performed on the set L are the insertion of an element and the extraction of an element with minimal altitude. Thus, L may be managed as a priority queue. In [29], an efficient priority queue algorithm has been proposed. It supports the operation of insertion, extraction of a minimal element or deletion in worst case time $O(\log \log m)$ where m is the numbers of elements in L . In fact, for computing a C-watershed, we can use a faster data structure. To reach this goal, we first need to establish the following fundamental theorem. It states that in a C-thinning sequence the points are lowered down by increasing order of altitude.

Theorem 15 (monotony) *Let $F \in \mathcal{F}(E)$ and suppose that (E, Γ) is a perfect fusion graph. Let H be a C-thinning of F . Any point M-cliff for H has an altitude greater than or equal to the altitude of any point M-cliff for F .*

A proof of Prop. 15 is given in Annex 7.3.

From Th. 15, we deduce that in Algorithm 1, when the map F is lowered at a point x with altitude k , any point inserted further in the set L has a level greater than or equal to k . Thus, the set L may be managed by a monotone priority queue. M. Thorup [29] proved that if we can sort n keys in time $n.s(n)$, then, and only then, there is a monotone queue with capacity n , supporting the *insert* and *extract-min* operations in $s(n)$ amortized time.

In Algorithm 1, the set K is used to avoid multiple insertions of a same point in the set L and can be managed as a Boolean array. Thus, the main loop (line 6) is executed at most $|E|$ times. Furthermore, the minima of a map can be extracted in linear time thanks to well known algorithms. We deduce Prop. 16 from these observations.

Property 16 *If the elements of E can be sorted according to F in linear time with respect to $|E|$, then Algorithm 1 terminates in linear time with respect to $(|E| + |\Gamma|)$.*

Since Algorithm 1 possesses the monotone property discussed above, it can be classified in the group of immersion algorithms (see [5–7] for examples). On non-perfect fusion graphs, Prop. 15 is in general not true. Consider, for instance, the map F in Fig. 5b. The point labeled t , with altitude 9, is M-cliff for F , but is not W-destructible. Let $H = [F_{t,2}]$, H is a C-thinning of F . We can remark that the point labeled s is the only M-cliff point for H and its altitude is strictly less than 9. Thus, on non-perfect fusion graphs a C-thinning sequence is in general not monotone. Moreover, it has been shown in [17] that in the case of a non-perfect fusion graph, some immersion algorithms are not monotone and a monotone W-thinning algorithm does not, in general, produce a divide that satisfies Prop. 14.

In this section, we have introduced the C-watershed transformation and have shown interesting properties on perfect fusion graphs. We may wonder whether it is possible to extend (some of) these properties to other kinds of graphs. In other words: what is the largest class of graphs such that Lem. 11 holds?

Let us denote by G^λ the graph depicted in Fig. 4b.

Theorem 17 *The three following statements are equivalent:*

- i) for any $F \in \mathcal{F}(E)$, any point M-cliff for F is W-destructible;*
- ii) for any $F \in \mathcal{F}(E)$, any C-watershed of F is a W-thinning of F ;*
- iii) the graph G^λ is not a subgraph of (E, Γ) .*

The proof of Th. 17 can be found in Annex 7.2.

5 Topological watersheds on perfect fusion graphs

As seen in the previous section, on a perfect fusion graph, a C-watershed is always a W-thinning whose divide is a thin cleft. In this section, we extend this result to divides of topological watersheds. Then, we define a particular type of topological watersheds that derive from the C-watersheds. We show that this family of topological watershed satisfies an interesting additional property.

Finally, we derive some new characterizations of perfect fusion graphs based on both thinness properties of C-watersheds and topological watersheds.

If a map F is a topological watershed, then there is no point in E which is W-destructible for F . Since any point M-cliff for F is W-destructible for F , we deduce the following property.

Theorem 18 *Let $F \in \mathcal{F}(E)$ and assume that (E, Γ) is a perfect fusion graph. If F is a topological watershed, then F is a C-watershed. Furthermore, the divide of any topological watershed is a thin cleft.*

As shown in the previous section a C-watershed is not necessarily a topological watershed. Thus, the converse of Th. 18 is, in general, not true.

Nevertheless, as stated by the next property, the C-watershed can be used to design an interesting strategy for computing a topological watershed in a perfect fusion graph.

Definition 19 *Let $F \in \mathcal{F}(E)$ and assume that (E, Γ) is a perfect fusion graph. We say that H is a C-topological watershed of F , if there exists a C-watershed I of F such that H is a topological watershed of I .*

In the case of a perfect fusion graph, it is proved by Th. 13 that a C-topological watershed of a map is necessarily a topological watershed of this map. On the contrary, as we will see a little later, all topological watersheds are not C-topological watersheds. Among all topological watersheds of a map, the C-topological watersheds satisfy an additional property (Prop. 20). Informally speaking, it states that the divides of C-topological watersheds are located on the “highest crests” that separate the minima of the original map. The following property is a direct consequence of the monotony theorem (Th. 15) on C-watersheds.

Let $F \in \mathcal{F}(E)$. We say that a path $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ in E is descending for F if for any $k \in [1, l]$, we have $F(x_k) \leq F(x_{k-1})$.

Property 20 *Let F and H be two maps in $\mathcal{F}(E)$ and assume that (E, Γ) is a perfect fusion graph. If H is a C-topological watershed of F , then for any point x in $\overline{M(H)}$, there exist two minima of F which can be reached from x by a descending path for F .*

The map H , depicted on Fig. 8c, is a C-topological watershed of the map F (Fig. 8a). It can be checked that from any point in $\overline{M(H)}$, two distinct minima of F can be reached by a descending path for F . On the contrary, the previous property is not verified by all topological watersheds. For instance, let us analyze the map I of Fig. 8d that is a topological watershed. We denote by x the vertex circled in Fig. 8a. Note that $x \in \overline{M(I)}$. The only minimum of F

which can be reached from x by a descending path is the one at the top left of the figure. Thus, the topological watershed I of F , which is not a C-topological watershed of F , does not verify Prop. 20.

From the preceding results, we derive some grayscale characterizations of perfect fusion graphs based on thinness properties of both C-watersheds and topological watersheds. Their proof can be found in Annex 7.4.

Let $H \in \mathcal{F}(E)$, $x \in E$ and let $k = H(x)$. If x is F-simple for $H[k]$, i.e., x is adjacent to exactly two components of $H[k]$, we say that x is *F-simple for H* .

Property 21 *The four following statements are equivalent:*

- i) (E, Γ) is a perfect fusion graph;
- ii) for any C-watershed $F \in \mathcal{F}(E)$, any point in $\overline{M(F)}$ is F-simple for $\overline{M(F)}$;
- iii) for any topological watershed $F \in \mathcal{F}(E)$, any point in $\overline{M(F)}$ is F-simple for $\overline{M(F)}$;
- iv) for any topological watershed $F \in \mathcal{F}(E)$, any point in $\overline{M(F)}$ is F-simple for F .

6 Perspectives: perfect fusion grids and hierarchical schemes

With the counter-examples depicted in this paper, we have seen that there exist topological watersheds whose divides are not thin clefts in 2D on the graphs induced by the 4- and 8-adjacency relation. In 3D, similar counter-examples (see [19]) can be found for the graphs induced by the 6- and 26-adjacency relations that are the extensions of the 4- and 8-adjacency to \mathbb{Z}^3 . On the contrary, we have shown that, on perfect fusion graphs, the divide of any topological watershed is a thin cleft. On these graphs, region merging schemes are easy to rigorously define and straightforward to implement. Thus, the framework of perfect fusion graphs is adapted for region merging methods based on topological watersheds.

In [19], we introduced the family of perfect fusion grids over \mathbb{Z}^n , for any $n \in \mathbb{N}$. Any element of this family is indeed a perfect fusion graph. We proved that any of these grids is “between” the direct adjacency graph (which generalizes the 4-adjacency to \mathbb{Z}^n) and the indirect adjacency graph (which generalizes the 8-adjacency to \mathbb{Z}^n). These n -dimensional grids are all equivalent (up to a translation) and, in a forthcoming paper, we intend to prove that they are the only graphs that possess these two properties. An example of (a restriction of) the 2-dimensional perfect fusion grid is presented in Fig. 8.

Perfect fusion grids thus constitute an interesting alternative to classical grids for watershed-based region merging methods. As an illustration of such a scheme, one can look, for instance, at Fig. 9. Future work will include revisiting

hierarchical segmentation methods [12,14] on perfect fusion grids.

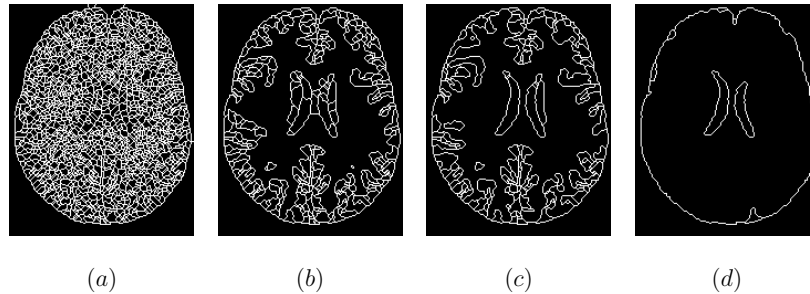


Fig. 9. Region merging on a perfect fusion grid; (a), the divide of a C-watershed of Fig. 1a; and (b,c,d), several steps of region merging starting from (b).

References

- [1] T. Kong, A. Rosenfeld, Digital topology: Introduction and survey, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 48 (3) (1989) 357–393.
- [2] A. Rosenfeld, A. Kak, *Digital picture processing*, Vol. 2, Academic Press, 1982, Ch. 10, section 10.4.2.d (region merging).
- [3] T. Pavlidis, *Structural Pattern Recognition*, Vol. 1 of Springer Series in Electrophysics, Springer-Verlag, 1977, Ch. 4–5, pp. 90–123, (segmentation techniques).
- [4] S. Beucher, C. Lantuéjoul, Use of watersheds in contour detection, in: *procs. Int Workshop on Image Processing Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*, 1979.
- [5] L. Vincent, P. Soille, Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 13 (6) (1991) 583–598.
- [6] F. Meyer, Un algorithme optimal de ligne de partage des eaux, in: *Actes du 8ème Congrès AFCET*, Lyon-Villeurbanne, France, 1991, pp. 847–859.
- [7] S. Beucher, F. Meyer, The morphological approach to segmentation: the watershed transformation, E. Dougherty (Ed.), *Mathematical Morphology in Image Processing*, Marcel Dekker (1993) 443–481.
- [8] M. Couprie, G. Bertrand, Topological grayscale watershed transform, in: *SPIE Vision Geometry V Proceedings*, Vol. 3168, 1997, pp. 136–146.
- [9] P. Jasiobedzki, C. Taylor, J. Brunt, Automated analysis of retinal images, *Image and Vision Computing* 1 (3) (1993) 139–144.

- [10] K. Haris, S. N. Efstratiadis, N. Maglaveras, A. K. Katsaggelos, Hybrid image segmentation using watersheds and fast region merging, *IEEE Trans. on Image Processing* 7 (12) (1998) 1684–1699.
- [11] A. Bleau, L. Leon, Watershed-based segmentation and region merging, *Comp. Vision and Image Und.* 77 (3) (2000) 317–370.
- [12] S. Beucher, Watershed, hierarchical segmentation and waterfall algorithm, in: *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, 1994, pp. 69–76.
- [13] F. Meyer, The dynamics of minima and contours, in: P. Maragos, R. W. Schafer, M. A. Butt (Eds.), *Mathematical Morphology and its Application to Image and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996, pp. 329–336.
- [14] L. Najman, M. Schmitt, Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 18 (12) (1996) 1163–1173.
- [15] G. Bertrand, On topological watersheds, *J. Math. Imaging Vision* 22 (2-3) (2005) 217–230.
- [16] M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Quasi-linear algorithms for the topological watershed, *J. Math. Imaging Vision* 22 (2-3) (2005) 231–249.
- [17] L. Najman, M. Couprie, G. Bertrand, Watersheds, mosaics and the emergence paradigm, *Discrete Appl. Math.* 147 (2-3) (2005) 301–324.
- [18] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie, L. Najman, Fusion graphs, region merging and watersheds, in: *Procs. of the 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Vol. LNCS 4245, 2006, pp. 343–354.
- [19] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie, L. Najman, Fusion graphs: merging properties and watersheds, Submitted. Also in technical report IGM2005-04, <http://igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2005/04.pdf>.
- [20] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Grayscale watersheds on perfect fusion graphs, in: *Procs. of the 11th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Vol. LNCS 4040, 2006, pp. 60–73.
- [21] G. Bertrand, On the dynamics, *Image and Vision Computing* 25 (4) (2007) 447–454.
- [22] A. Rosenfeld, The fuzzy geometry of image subsets, *Pattern Recognition Letters* 2 (1984) 311–317.
- [23] F. Meyer, Minimum spanning forests for morphological segmentation, in: *Procs. of the second international conference on Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, 1994, pp. 77–84.
- [24] J. K. Udupa, S. Samarsekara, Fuzzy connectedness and object definition: Theory, algorithms, and applications in image segmentation, *Graphical Models and Image Processing* 58 (1996) 246–261.

-
- [25] A. X. Falcão, J. Stolfi, R. de Alencar Lotufo, The image foresting transform: Theory, algorithm and applications, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 26 (2004) 19–29.
 - [26] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie, Watershed cuts, in: Procs. of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology, to appear, 2007.
 - [27] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie, Watersheds, minimum spanning forests, and the drop of water principle, Submitted. Also in technical report IGM2007-01, <http://igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2007/01.pdf>.
 - [28] L. Najman, M. Couprie, Building the component tree in quasi-linear time, IEEE Trans. on Image Processing 15 (11) (2006) 3531–3539.
 - [29] M. Thorup, On RAM priority queues, in: 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1996, pp. 59–67.

7 Annex

7.1 Proof of Th. 9

Let us recall a characterization of topological watersheds (Th. 22) that will help us to prove Th. 9.

Let X and Y be two subsets of E . We say that Y is a W -thinning of X if:

- i) $Y = X$; or if
- ii) there exists a set Z that is a W -thinning of X and there exists a uniconnected point x for Z such that $Y = X \setminus \{x\}$.

Let $C \subseteq X$ and assume that Y is a W -thinning of X . We say that Y is a *cleft of X constrained by C* if $Z = Y$ whenever Z is a W -thinning of Y and $C \subseteq Z$.

In other words, Y is a cleft of X constrained by C if Y is a W -thinning of X which contains C and if any point in $Y \setminus C$ is not uniconnected for Y .

Theorem 22 (2 in [15]) *Let F be in $\mathcal{F}(E)$. The map F is a topological watershed if and only if, for each $k \in \mathbb{K}$, $F[k]$ is a cleft constrained by $F[k+1]$.*

We are now ready to prove Th. 9.

Proof of Th. 9: *i):* Suppose that there exists a cleft $X \subseteq E$, and that there exists $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$ such that (A, Γ_A) is not a fusion graph. Then, by Th. 5, there exists a cleft $Y \subseteq A$ on (A, Γ_A) , such that $|\mathcal{C}(\overline{Y})| \leq 2$, that is not thin. Let us define the map $F \in \mathcal{F}(E)$ as follows: for any $x \in E$, if $x \in X$, $F(x) = 2$, if

$x \in Y$, $F(x) = 1$ and if $x \in (E \setminus (X \cup Y))$, $F(x) = 0$. It can be seen that F is a topological watershed which is not thin.

ii): Suppose that F is a topological watershed which is not thin. There exists $x \in \text{int}(F)$ with maximal altitude. Let k be the altitude of x . Necessarily $F[k+1] \cap \text{int}(F) = \emptyset$. Let $A \in \mathcal{C}(\overline{F}[k+1])$ such that $x \in A$. Let $Y = A \cap F[k]$. Since $A \cap F[k+1] = \emptyset$ (as $A \in \mathcal{C}(\overline{F}[k+1])$), by Th. 22, there is no point unconnected for $F[k]$ in Y . Then any point $y \in Y$ which is adjacent to $\overline{F}[k]$ is adjacent to at least two connected components of $\overline{F}[k]$. Furthermore it can be seen that these connected components are all included in A . Thus Y is a cleft on (A, Γ_A) .

Remark that $x \in Y$. From the very definition of $\text{int}(F)$ and since $x \in \text{int}(F)$, we have: $x \in \text{int}(F[k])$ and $x \in \text{int}(Y)$. Hence Y is a cleft on (A, Γ_A) which is not thin and by Th. 5 (A, Γ_A) is not a fusion graph.

We are now going to prove that there exists a cleft $X \subseteq E$ on (E, Γ) such that $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$. More precisely, we are going to show that $X = \Gamma^*(A)$ is a cleft (and obviously $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$).

If $X = \emptyset$ the proof is done. Otherwise, let $z \in X$ and let $k' = F(z)$. Since $A \in \mathcal{C}(\overline{F}[k+1])$ we know that $k' > k$. Since $k' > k$ and since x is the highest point of $\text{int}(F)$, we know that z cannot be inner for F . Hence, since F is a watershed, we deduce that z is adjacent to at least two connected components of $\overline{F}[k']$. One of these components, say A' , must contain A . Let B be any other one of these components. It must contain a point y adjacent to z such that $y \notin \Gamma(A')$ (otherwise we would have $B = A'$). Since $A \subseteq A'$, we have $y \notin \Gamma(A)$. Thus, z is adjacent to at least two components of \overline{X} , which are namely A and the component of \overline{X} which contains y . Hence, z is not a unconnected for X and therefore, by the very definition of a cleft, we deduce that $X = \Gamma^*(A)$ is a cleft on (E, Γ) such that $A \in \mathcal{C}(\overline{X})$, hence Th. 9. \square

7.2 Proof of Lem. 11 and Th. 17

Observe that Lem. 11 is a corollary of Th. 17. Thus we start by the proof of Th. 17.

Remark 23 *Let F be a map in $\mathcal{F}(E)$. From the very definition of W -destructible points and topological watersheds, it may be seen that if G is a W -thinning of F , then, for any $k \in \mathbb{K}^+$, we have $|\mathcal{C}(\overline{F}[k])| = |\mathcal{C}(\overline{G}[k])|$.*

Proof of Th. 17:

$i \Rightarrow ii$: Follows straightforwardly the definition of a C-watershed.

$\overline{iii} \Rightarrow \overline{ii}$: Suppose that there exists five points p, q, r, s and t in E such that the subgraph G' of (E, Γ) induced by $\{p, q, r, s, t\}$ is isomorphic to G^λ . Let us consider $F \in \mathcal{F}(E)$ such that: (a), $F(p) = F(r) = F(t) = 0$; (b), $F(q) = 1$; (c), $F(s) = 2$; and (d) for any $x \in E \setminus \{p, q, r, s, t\}$, $F(x) = 4$. It may be easily

seen that $\overline{F}[2]$ is made of exactly two components. Observe that the point s is the only M-cliff point for F and that it is adjacent to $\{t\}$ a minimum of F at altitude 0. Thus, for any C-watershed G of F ($G \neq F$), we have $G(s) = 0$. It may be seen that $|\mathcal{C}(\overline{G}[2])| = 1$ whereas $|\mathcal{C}(\overline{F}[2])| = 2$. Thus we establish \overline{ii} by the converse of Rem. 23.

$\overline{i} \Rightarrow \overline{iii}$: Suppose that there exists a map $F \in \mathcal{F}(E)$ such that there is a point $x_1 \in E$ that is M-cliff for F and not W-destructible for F . Let $h = F(x_1)$. Let $x_0 \in \Gamma(x_1)$ be any point in $M \subseteq M(F)$ the only minimum of F adjacent to x_1 . It may be seen that $x_0 \in \overline{F}[h]$. Thus, since x_1 is not W-destructible, x_1 must be adjacent to X a connected component of $\overline{F}[h]$ which contains neither $\{x_0\}$ nor any point of M . Let $Y = M(F) \cap X$. As a consequence of the definition of a minimum, Y is not empty. Let Π be the set of all paths $\langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ such that x_2, \dots, x_k are in X and x_k is adjacent to Y . Let $\pi = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_\ell \rangle$ be a shortest path among the paths in Π (i.e., the length of any path in Π is greater than or equal to the length ℓ of π). Since x_1 is adjacent to a unique minimum M of F and since M does not intersect X , x_1 cannot be adjacent to Y . Hence, $\ell > 1$ and, by construction, it follows that $x_\ell \in X$. Thus, $F(x_\ell) < h$ because $X \subseteq \overline{F}[h]$. Suppose that x_ℓ is adjacent to a single minimum of F , then x_ℓ would be a cliff point, the altitude of which is less than the altitude of x_1 , a contradiction since x_1 is M-cliff for F . Thus, there exist two points in $\Gamma(x_\ell)$, say y and z , which are in two distinct minima of F . To establish (\overline{iii}) , we are now going to prove that the subgraph of (E, Γ) induced by $\{y, z, x_\ell, x_{\ell-1}, x_{\ell-2}\}$ is isomorphic to G^λ . Since y and z are in two distinct minima of F , $y \notin \Gamma(z)$. Furthermore, by construction, $x_{\ell-1} \in \Gamma(x_{\ell-2})$, $x_\ell \in \Gamma(x_{\ell-1})$ and y and z both belong to $\Gamma(x_\ell)$. It is thus sufficient to prove that $y \notin \Gamma(x_{\ell-1})$, $y \notin \Gamma(x_{\ell-2})$ (and also $z \notin \Gamma(x_{\ell-1})$, $z \notin \Gamma(x_{\ell-2})$) and that $x_\ell \notin \Gamma(x_{\ell-2})$. If $\ell = 2$, then $x_{\ell-2} = x_0$ and $x_{\ell-1} = x_1$. In this case, if $x_\ell \in \Gamma(x_{\ell-2})$, then x_0 must belong to X since $x_\ell \in X$ and $F(x_0) < h$. This is by construction impossible. If $\ell > 2$ and $x_\ell \in \Gamma(x_{\ell-2})$, then π is not a shortest among the paths in Π since $\langle x_0, \dots, x_{\ell-2}, x_\ell \rangle$ would also belong to Π . Therefore, in all cases, $x_{\ell-2} \notin \Gamma(x_\ell)$. If $y \in \Gamma(x_{\ell-1})$, it may be seen that $\pi' = \langle x_0, \dots, x_{\ell-1} \rangle$ would belong to Π , which is impossible since the length of π' is less than the one of π . In the same manner, we can see that $y \notin \Gamma(x_{\ell-2})$, $z \notin \Gamma(x_{\ell-1})$, and $z \notin \Gamma(x_\ell)$. Thus \overline{iii} . \square

Proof of Lem. 11: Since (E, Γ) is a perfect fusion graph, from statement ii of Th. 6, G^\blacktriangle is not a subgraph of (E, Γ) . Remark that G^\blacktriangle is a subgraph of G^λ . Thus G^λ is not a subgraph of (E, Γ) . Let $x \in E$ be any M-cliff point for F . From Th. 17, x is W-destructible for F .

Let l be the level of the only minimum of F adjacent to x . When x has been lowered down to $F(x) - 1$ and while it has not been lowered down to l , x is the only point M-cliff for F^i (where $F^i = [F^{i-1} \setminus x]$, $F^0 = F$). When x has been lowered down to l it is not W-destructible any more, hence l is the lowest value of x . \square

7.3 Proof of Th. 15

Lemma 24 Assume that (E, Γ) is a perfect fusion graph. Let $X \subseteq E$ be a nonempty connected set and let Y be a nonempty subset of X . If $\text{int}(X \setminus Y) \neq \emptyset$, then there exists $y \in X \setminus Y$ adjacent to a single connected component of Y .

Proof: Let us consider (X, Γ_X) the subgraph of (E, Γ) induced by X . It is a connected graph. By Th. 6iv, (X, Γ_X) is a fusion graph. If $|\mathcal{C}(Y)| < 2$, the result follows from the connectedness of X . Otherwise, since $\text{int}(X \setminus Y) \neq \emptyset$, we deduce from Th. 5 that $X \setminus Y$ is not a cleft on (X, Γ_X) , hence there exists $y \in [X \setminus Y]$ which is unconnected for $[X \setminus Y]$. Therefore, by definition of a unconnected point, y is adjacent to a single connected component of $\overline{(X \setminus Y)}$ on (X, Γ_X) , hence y is adjacent to exactly one connected component of Y . \square

Proof of Th. 15: Let x be any point M-cliff for F . Let $H_0 = [F_{x,\ell}]$, where ℓ is the altitude of the only minimum of F adjacent to x . Let y be any point M-cliff for H_0 . It may be seen that y is adjacent to zero or one minimum of F . If y is adjacent to one minimum of F , y is a cliff point for F , and then $F(y) \geq F(x)$ since x is M-cliff for F . Suppose now that y is not adjacent to any minimum of F (i.e., $y \in \text{int}(\overline{M(F)})$). Let $k = F(y)$. Let X be the component of $\overline{F[k+1]}$ that contains y . From the definition of a minimum, it may be seen that the family \mathcal{M} of all minima of F included in X is not empty. Let $Y = \cup\{M \in \mathcal{M}\}$. Since $y \in \text{int}(\overline{M(F)})$, it can be seen that y is inner for $[X \setminus Y]$. As a consequence, by Lem. 24, there exists $z \in [X \setminus Y]$ adjacent to a unique component of Y , that is z is a cliff point for F . As x is an M-cliff point for F , $F(x) \leq F(z)$. Since $z \in \overline{F[k+1]}$, $F(z) \leq F(y)$. We thus get $F(x) \leq F(y)$. By induction, Th. 15 is established. \square

7.4 Proof of Prop. 21

Proof of Prop. 21:

$i \Rightarrow ii$: The fact that (E, Γ) is a perfect fusion graph implies (from Th. 6iii) that any cleft $X \subseteq E$ is such that any $x \in X$ is F-simple for X . By definition, a map $F \in \mathcal{F}(E)$ is a C-watershed if and only if $\overline{M(F)}$ is a cleft, hence ii .

$ii \Rightarrow iii$: Any topological watershed is a C-watershed hence iii .

$\bar{i} \Rightarrow (\bar{iii})$ and $\bar{i} \Rightarrow (\bar{iv})$: Suppose that (E, Γ) is not a perfect fusion graph. Then, by Th. 6iii, there exists a cleft $Y \subseteq E$ such that there exists $y \in Y$ which is not F-simple for Y . We define $F \in \mathcal{F}(E)$ such that for any x in Y , $F(x) = 1$ and for any $x \in \overline{Y}$, $F(x) = 0$. Remark that $Y = F[1] = \overline{M(F)}$, and that $\overline{F[1]} = M(F)$. Thus, since Y is a cleft, there is no unconnected point for $\overline{M(F)}$ and there is no W-destructible point for F . Thus, F is both a topological watershed and a C-watershed. Since y is not F-simple for Y , according to the preceding

remarks, we deduce that y is neither F-simple for F nor F-simple for $\overline{M(F)}$. Hence \overline{iii} and \overline{iv} both hold.

$i \Rightarrow iv$: Let $F \in \mathcal{F}(E)$ be any topological watershed. Let $x \in \overline{M(F)}$ and let $k = F(x)$. Since $(i \Rightarrow ii \Rightarrow iii)$, x is adjacent to exactly two minima of F . Hence, x is adjacent to at least one component of $\overline{F[k]}$. Since F is a topological watershed, x is not unconnected for $F[k]$. Therefore, x is adjacent to at least two components of $\overline{F[k]}$. Since (E, Γ) is a perfect fusion graph, by Th. 6.v, x is adjacent to at most two components of $\overline{F[k]}$, hence x is F-simple for F . \square

Annexe C

Watersheds, minimum spanning forests and the drop of water principle

J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie.
Rapport technique Institut-Gaspard-Monge IGM 2007-01.
Soumis pour publication en revue.

Watersheds, minimum spanning forests, and the drop of water principle

J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, and M. Couprie

Institut Gaspard-Monge

Laboratoire A2SI, Groupe ESIEE

Cité Descartes, BP99, 93162 Noisy-le-Grand Cedex France

Abstract

In this paper, we study the watersheds in edge-weighted graphs. Contrarily to previous work, we define the watersheds following the intuitive idea of drops of water flowing on a topographic surface. We establish the consistency of these watersheds and proved their optimality in terms of minimum spanning forests. We introduce a new local transformation on maps which equivalently define these watersheds and derive two linear-time algorithms. To our best knowledge, similar properties are not verified in other frameworks and the two proposed algorithms are the most efficient existing algorithms, both in theory and practice. Afterward, we investigate the mathematical links and differences with two other segmentation methods, *i.e.*, the Image Foresting Transform and the topological watershed. Finally, the defined concepts are illustrated in image segmentation leading to the conclusion that the proposed approach improves the quality of watershed-based segmentations.

Key words: Watershed, minimum spanning forest, minimum spanning tree, graph, mathematical morphology, image segmentation

Introduction

The watershed has been extensively studied during the 19th century by Maxwell [1] and Jordan [2] among others. One hundred years later, the watershed transform was introduced by Beucher and Lantuéjoul [3] for image segmentation and is now used as a fundamental step in many powerful segmentation procedures.

Email addresses: j.cousty@esiee.fr (J. Cousty), g.bertrand@esiee.fr (G. Bertrand), l.najman@esiee.fr (L. Najman), m.couprie@esiee.fr (M. Couprie).

Let us consider a grayscale image as a topographic surface: the gray level of a pixel becomes the elevation of a point, the basins and valleys of the topographic surface correspond to dark areas, whereas the mountains and crest lines correspond to the light areas. The watershed divide may be thought of as a separating set of points along which a drop of water can flow down towards at least two regional minima.

In order to compute the watershed of a digital image, several approaches have been proposed and many of them consider a grayscale digital image as a vertex-weighted graph. One of the most popular consists of simulating a flooding of the topographic surface from its regional minima [4–6]. The divide is made of “dams” built at those points where water coming from different minima would meet. Another approach, called topological watershed [7–9], allows to rigorously define the notion of a watershed in a discrete space and to prove important properties not guaranteed by most watershed algorithms [10]. It consists of lowering the values of a map (*e.g.*, the grayscale image) while preserving some topological properties, namely, the number of connected components of each lower cross-section. In this case, the watershed divide is the set of points not in any regional minimum of the transformed map.

In this paper, we investigate a different framework: we consider a graph whose edges are weighted by a cost function (see, for example, [11] and [12, 13]).

We propose a new definition of watershed, called watershed cut, and obtain a set of remarkable properties. Unlike previous works, watershed cuts are defined following the intuitive idea of drops of water flowing on a topographic surface.

Our first contribution establishes the consistency of watershed cuts. In particular, we prove that they can be equivalently defined by their “catchment basins” (through a steepest descent property) or by the “dividing lines” separating these catchment basins (through the drop of water principle). As far as we know, our definition is the first one that satisfies such a property.

Our second contribution establishes the optimality of watershed cuts. In [11], F. Meyer shows the link between minimum spanning forests (MSF) and flooding from marker algorithms. In this paper, we extend the problem of minimum spanning forests and show the equivalence between watershed cuts and separations induced by minimum spanning forest relative to the minima.

Our third contribution consists of a new thinning paradigm to compute watersheds in linear time. More precisely, we propose a new transformation, called border thinning, that lowers the values of edges that match a simple local configuration until idempotence. The minima of the transformed map constitute a minimum spanning forest relative to the minima of the original one and, hence, induce a watershed cut. Moreover, any such minimum spanning forest

can be obtained by this transformation. We discuss the possibility of parallel algorithms based on this transformation and give a sequential implementation which runs in linear time.

Our fourth contribution is a second linear-time algorithm that does not need minima extraction. Contrarily to previously published algorithms, the two algorithms proposed in this paper do not require any sorting step, nor the use of any hierarchical queue. Therefore, they both run in linear time whatever the range of the input map. To our best knowledge, these are the first watershed algorithms with such properties.

Our fifth contribution consists of a mathematical comparison between watershed cuts and two other segmentation paradigms. We first study the links and differences with shortest-path forests (the theoretical basis of the Image Foresting Transform [12] and the fuzzy connected image segmentation [14,15]). We show that any minimum spanning forest is a shortest-path forest and that the converse is, in general, not true. Then, we investigate the topological watershed. We prove that any border thinning is a W-thinning (*i.e.*, the transformation which allows to obtain a topological watershed). A major consequence is that border thinnings, and, thus, watershed cuts inherit the mathematical properties of topological watersheds [8,10].

Finally, we illustrate that the proposed watershed localizes with better accuracy the contours of objects in digital images. To this aim, we provide, on few examples, results of morphological schemes based on watersheds in vertex weighted graphs and results of their adaptation in edge-weighted graphs.

1 Basic notions and notations

This paper is settled in the framework of edge-weighted graphs. Following the notations of [16], we present some basic definitions to handle such kind of graphs.

1.1 Graphs

We define a *graph* as a pair $X = (V(X), E(X))$ where $V(X)$ is a finite set and $E(X)$ is composed of unordered pairs of $V(X)$, *i.e.*, $E(X)$ is a subset of $\{\{x, y\} \subseteq V(X) \mid x \neq y\}$. Each element of $V(X)$ is called a *vertex* or a *point* (of X), and each element of $E(X)$ is called an *edge* (of X). If $V(X) \neq \emptyset$, we say that X is *non-empty*.

Let X be a graph. If $u = \{x, y\}$ is an edge of X , we say that x and y are

adjacent (for X). Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be an ordered sequence of vertices of X , π is a *path from x_0 to x_l in X (or in $V(X)$)* if for any $i \in [1, l]$, x_i is adjacent to x_{i-1} . In this case, we say that x_0 and x_l are *linked for X* . If $l = 0$, then π is a *trivial path in X* . We say that X is *connected* if any two vertices of X are linked for X .

Let X and Y be two graphs. If $V(Y) \subseteq V(X)$ and $E(Y) \subseteq E(X)$, we say that Y is a *subgraph of X* and we write $Y \subseteq X$. We say that Y is a *connected component of X* , or simply a *component of X* , if Y is a connected subgraph of X which is maximal for this property, *i.e.*, for any connected graph Z , $Y \subseteq Z \subseteq X$ implies $Z = Y$.

Throughout this paper G denotes a connected graph. In order to simplify the notations, this graph will be denoted by $G = (V, E)$ instead of $G = (V(G), E(G))$. We will also assume that $E \neq \emptyset$.

In applications to image segmentation, V is the set of picture elements (pixels) and E is any of the usual adjacency relations, *e.g.*, the 4- or 8-adjacency in 2D [17].

Let $X \subseteq G$. An edge $\{x, y\}$ of G is *adjacent to X* if $\{x, y\} \cap V(X) \neq \emptyset$ and if $\{x, y\}$ does not belong to $E(X)$; in this case and if y does not belong to $E(X)$, we say that $\{x, y\}$ is *outgoing from X* and that y is *adjacent to X* . If π is a path from x to y and y is a vertex of X , then π is a *path from x to X (in G)*.

If S is a subset of E , we denote by \overline{S} the *complementary set of S in E* , *i.e.*, $\overline{S} = E \setminus S$.

Let $S \subseteq E$, the *graph induced by S* is the graph whose edge set is S and whose vertex set is made of all points which belong to an edge in S , *i.e.*, $(\{x \in V \mid \exists u \in S, x \in u\}, S)$. In the following, when no confusion may occur, the graph induced by S is also denoted by S .

1.2 Edge-weighted graphs

We denote by \mathcal{F} the set of all maps from E to \mathbb{Z} .

Let $F \in \mathcal{F}$. If u is an edge of G , $F(u)$ is the *altitude of u* . Let $X \subseteq G$ and $k \in \mathbb{Z}$. A subgraph X of G is a *minimum of F (at altitude k)* if:

- X is connected; and
- k is the altitude of any edge of X ; and
- the altitude of any edge adjacent to X is strictly greater than k .

We denote by $M(F)$ the graph whose vertex set and edge set are, respectively, the union of the vertex sets and edge sets of all minima of F .

In the sequel of this paper, F denotes an element of \mathcal{F} .

For applications to image segmentation, we will assume that the altitude of u , an edge between two pixels x and y , represents the dissimilarity between x and y (e.g., $F(u)$ equals the absolute difference of intensity between x and y). Thus, we suppose that the salient contours are located on the highest edges of G .

2 Watersheds

The intuitive idea underlying the notion of a watershed comes from the field of topography: a drop of water falling on a topographic surface follows a descending path and eventually reaches a minimum. The watershed may be thought of as the separating lines of the domain of attraction of drops of water. Despite its simplicity, none of the classical definitions formalize this intuitive idea. In this paper, contrarily to previous works, we follow the drop of water principle to define the notion of a watershed in an edge-weighted graph.

2.1 Extensions and graph cuts

We present the notions of extension and graph cut which play an important role for defining a watershed in an edge-weighted graph.

Intuitively, the regions of a watershed (also called catchment basins) are associated with the regional minima of the map. Each catchment basin contains a unique regional minimum, and conversely, each regional minimum is included in a unique catchment basin: the regions of the watershed “extend” the minima. In [8], G. Bertrand formalizes the notion of extension.

Definition 1 (from Def. 12 in [8]) *Let X and Y be two non-empty sub-graphs of G . We say that Y is an extension of X (in G) if $X \subseteq Y$ and if any component of Y contains exactly one component of X .*

The graphs (drawn in bold) in Fig. 1b and c are two extensions of the one depicted in Fig. 1a.

The notion of extension is very general. Many segmentation algorithms iteratively extend some seed components in a graph: they produce an extension of the seeds. Most of them terminate once they have reached an extension which cover all the vertices of the graph. The separation which is thus produced is called a graph cut.

Definition 2 *Let $X \subseteq G$ and $S \subseteq E$. We say that S is a (graph) cut for X*

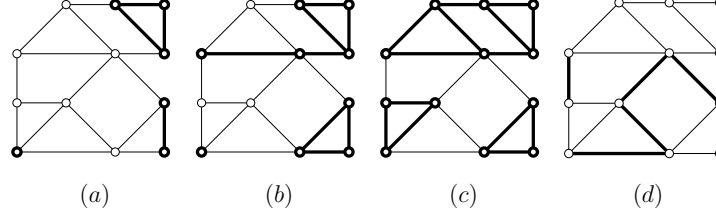


Fig. 1. A graph G . The set of vertices and edges represented in bold is: (a), a subgraph X of G ; (b), an extension of X ; (c): an extension Y of X which is maximal; and (d): a cut S for X such that $\bar{S} = Y$.

if \bar{S} is an extension of X and if S is minimal for this property, i.e., if $T \subseteq S$ and \bar{T} is an extension of X , then we have $T = S$.

The set S depicted in Fig. 1d is a cut for X (Fig. 1a). It can be verified that \bar{S} (Fig. 1c) is an extension of X and that S is minimal for this property. If X is a subgraph of G and S a cut for X , it may be easily seen that \bar{S} is a maximal extension of X .

The notion of graph cut has been studied for many years and is often defined by means of partitions. In this case, a set $S \subseteq E$ is said to be a graph cut if there exists a partition of V such that S is the set of all edges of G whose extremities are in two distinct sets of the partition. If each set of the partition is connected and contains the vertex set of a unique component of a subgraph of G , then S is a cut for this subgraph. It may be easily seen that this definition is equivalent to Def. 2. One of the most fundamental results in combinatorial optimization involves graph cuts. It states that given two isolated vertices of an edge-weighted graph (called source and sink), finding a cut of minimal cost that separates these vertices is equivalent to finding a maximum flow (see, for instance, [16], chapter 6.2). There exist polynomial-time algorithms to find the so-called min-cut. On the other hand, finding a cut of minimal cost among all the cuts for a subgraph which is not reduced to two isolated vertices is NP-hard [18]. In the forthcoming sections, we introduce the watershed cuts of an edge-weighted graph and show that these watersheds are graph cuts which also satisfy an optimality property. A major advantage is that they can be computed in linear-time.

2.2 Watersheds

We introduce the watershed cuts of an edge-weighted graph. To this aim, we formalize the drop of water principle. Intuitively, the catchment basins constitute an extension of the minima and they are separated by “lines” from which a drop of water can flow down towards distinct minima.

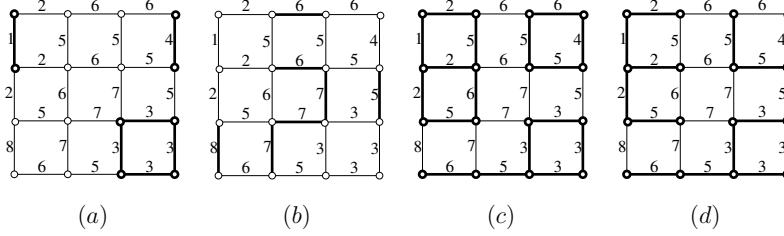


Fig. 2. A graph G and a map F . Edges and vertices in bold depict: (a), the minima of F ; (b), a watershed S of F ; (c), an extension of $M(F)$ which is equal to \bar{S} ; and (d), a MSF relative to $M(F)$.

Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be a path in G . The path π is *descending (for F)* if, for any $i \in [1, l-1]$, $F(\{x_{i-1}, x_i\}) \geq F(\{x_i, x_{i+1}\})$.

Definition 3 (drop of water principle) Let $S \subseteq E$. We say that S satisfies the drop of water principle (for F) if \bar{S} is an extension of $M(F)$ and if for any $u = \{x_0, y_0\} \in S$, there exist $\pi_1 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ and $\pi_2 = \langle y_0, \dots, y_m \rangle$ which are two descending paths in \bar{S} such that:

- x_n and y_m are vertices of two distinct minima of F ; and
- $F(u) \geq F(\{x_0, x_1\})$ (resp. $F(u) \geq F(\{y_0, y_1\})$), whenever π_1 (resp. π_2) is not trivial.

If S satisfies the drop of water principle, we say that S is a watershed cut, or simply a watershed, of F .

We illustrate the previous definition on the function F depicted in Fig. 2. The function F contains three minima (Fig. 2a). We denote by S the set of bold edges depicted in Fig. 2b. It may be seen that \bar{S} (Fig. 2c) is an extension of $M(F)$. Let $u = \{x, y\} \in S$ be the edge at altitude 8. There exists π_1 (resp. π_2) a descending path in \bar{S} from x (resp. y) to the minimum at altitude 1 (resp. 3). The first edge of π_1 (resp. π_2) is lower than u whose altitude is 8. It can be verified that the previous properties hold for any edge in S . Thus, S is a watershed of F . The next statement follows from the definition of a watershed.

Property 4 Let $S \subseteq E$. If S is a watershed of F , then S is a cut for $M(F)$.

Notice that a watershed of F is defined thanks to conditions that depend of the altitude of the edges whereas the definition of a cut is solely based on the structure of the graph. Consequently, the converse of Prop. 4 is, in general, not true.

As an illustration of the previous property, it may be verified that the watershed of the map F , depicted in Fig. 2b, is a cut for the minima of F .

2.3 Catchment basins

A popular alternative to Def. 3 defines a watershed exclusively by its catchment basins and does not involve any property of the divide [19–22]. In a vertex-weighted graph, such definitions raise several problems. The catchment basin of a minimum M can be defined as the points from which M can be reached by a path with steepest descent. In this case, several catchment basins may overlap each other. To avoid this problem, some authors define the catchment basin of M as the set of points from which M is the only minimum that can be reached by a path with steepest descent. In this case, some thick sets of points may not belong to any catchment basin (such situations are illustrated in [22]).

In the framework of edge-weighted graph, we define a *catchment basin* as a component of the complementary of a watershed. The following theorem (Th. 6) shows that a watershed can be defined equivalently by its divide line or by its catchment basins.

For that purpose, we start with some definitions relative to the notion of path with steepest descent.

From now on, we will also denote by F the map from V to \mathbb{Z} such that for any $x \in V$, $F(x)$ is the minimal altitude of an edge which contains x , i.e., $F(x) = \min\{F(u) \mid u \in E, x \in u\}$; $F(x)$ is the altitude of x .

Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be a path in G . The path π is a *path with steepest descent* for F if, for any $i \in [1, l]$, $F(\{x_{i-1}, x_i\}) = F(x_{i-1})$.

Definition 5 (steepest descent) *Let $S \subseteq E$ be a cut for $M(F)$. We say that S is a basin cut of F if, from each point of V to $M(F)$, there exists, in the graph induced by \overline{S} , a path with steepest descent for F .*

Theorem 6 (consistency) *Let $S \subseteq E$. The set S is a basin cut of F if and only if S is a watershed cut of F .*

The previous theorem establishes the consistency of watershed cuts: they can be equivalently defined by a steepest descent property on the catchment basins (regions) or by the drop of water principle on the cut (border) which separate them. As far as we know, in the literature about discrete watershed, no similar property has ever been proved. Some counter examples which show that such a duality does not hold in other frameworks can be found in [23]. Th. 6 thus emphasizes that the framework considered in this paper is adapted for the definition and study of discrete watersheds.

3 Minimum spanning forests and watershed optimality

In this section, we establish the optimality of watersheds. To this aim, we introduce the notion of minimum spanning forests relative to subgraphs of G . We will see that each of these forests induces a unique graph cut. The main result of this section (Th. 10) states that a graph cut is induced by a minimum spanning forest relative to the minima of a map if and only if it is a watershed of this map. In Sec. 3.2, we show that the problem of finding a relative minimum spanning forest is equivalent to the classical problem of finding a minimum spanning tree. In fact, this provides a mean to derive, from any minimum spanning tree algorithm, an algorithm for relative minimum spanning forests, and thus also, for watersheds.

Let X and Y be two non-empty subgraphs of G . We say that Y is a *forest relative to X* if:

- i) Y is an extension of X ; and
- ii) for any extension $Z \subseteq Y$ of X , we have $Z = Y$ whenever $V(Z) = V(Y)$.

We say that Y is a *spanning forest relative to X (for G)* if Y is a forest relative to X and $V(Y) = V$.

Let $X \subseteq G$. We say that X is a *tree* (resp. a *spanning tree*) if X is a forest (resp. spanning forest) relative to the subgraph $(\{x\}, \emptyset)$, x being any vertex of X . We say that X is a *forest* (resp. a *spanning forest*) if X is a forest (resp. a spanning forest) relative to (S, \emptyset) , S being a subset of $V(X)$.

Remark 7 *The notions of tree and forest (resp. spanning tree and forest) presented above corresponds exactly to the usual notions of tree and forest (resp. spanning tree and forest). On the one hand, the notion of forest (resp. tree) is usually defined as a graph (resp. connected graph) which does not contain any cycle, i.e., any simple path whose first and last points are adjacent. On the other hand, it may be seen that a graph X is a forest relative to a subgraph Y of G if and only if X is an extension of Y and any cycle in X is also a cycle in Y . Thus, the two notions of forest (hence tree) are equivalent.*

Let X be a subgraph of G , the *weight of X (for F)* is the value $F(X) = \sum_{u \in E(X)} F(u)$.

Definition 8 *Let X and Y be two subgraphs of G . We say that Y is a minimum spanning forest (MSF) relative to X (for F , in G) if Y is a spanning forest relative to X and if the weight of Y is less than or equal to the weight of any other spanning forest relative to X . In this case, we also say that Y is a relative MSF.*

Let us consider the graph G depicted in Fig. 3 and the subgraph X depicted in bold in Fig. 3a. The graphs Y and Z (bold edges and vertices) in Figs. 3b

and c are two MSFs relative to X .

3.1 Relative MSFs and watersheds

We now have the mathematical tools to present the main result of this section (Th. 10) which establishes the optimality of watersheds. It shows the equivalence between the cuts which satisfy the drop of water principle and those induced by the MSFs relative to the minima of a map.

We start by the following lemma which gives, thanks to Th. 6, a first intuition of Th. 10.

Lemma 9 *Let X be a spanning forest relative to $M(F)$. The graph X is a MSF relative to $M(F)$ if and only if, for any x in V , there exists a path in X from x to $M(F)$ which is a path with steepest descent for F .*

Let X be a subgraph of G and let Y be a spanning forest relative to X . There exists a unique cut S for Y and this cut is also a cut for X . We say that this unique cut is the *cut induced by Y* . Furthermore, if Y is a MSF relative to X , we say that that S is a *MSF cut for X* .

Theorem 10 (optimality) *Let $S \subseteq E$. The set S is MSF cut for $M(F)$ if and only if S is a watershed cut of F .*

As far as we know, this is the first result which establishes watershed optimality.

3.2 Relative MSFs and minimum spanning trees

The minimum spanning tree problem is one of the most typical and well-known problems of combinatorial optimization (see [24–27]). It has been applied for many years in image analysis [28]. We show that the minimum spanning tree problem is equivalent to the problem of finding a MSF relative to a subgraph of G .

Let $X \subseteq G$. The graph X is a *minimum spanning tree (for F , in G)* if X is a MSF relative to the subgraph $(\{x\}, \emptyset)$, x being any vertex of X .

Consequently to Rem. 7, it may be easily seen that the notion of minimum spanning tree presented above corresponds exactly to the usual one.

In order to recover the link between flooding algorithms and minimum spanning trees, in [11], F. Meyer proposed a construction which allows to show

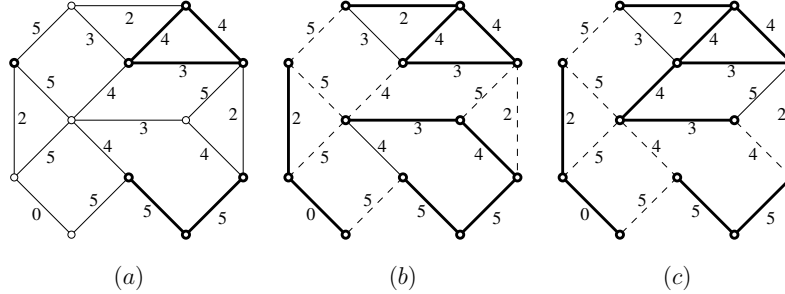


Fig. 3. A graph G and a map F . The bold edges and vertices represent: (a), X a subgraph of G ; (b) and (c), two MSFs relative to X ; their induced cuts are represented by dashed edges.

the equivalence between finding a MSF rooted in a set of vertices and finding a minimum spanning tree. Here, we extend this construction for proving the equivalence between finding a minimum spanning tree and a MSF relative to a subgraph of G . Let us consider, in a first time, a graph $X \subseteq G$ such that $E(X) = \emptyset$, *i.e.*, a graph composed of isolated vertices. From G and X , we can construct a new graph $G' = (V', E')$ which contains an additional vertex z (*i.e.*, $z \notin V$) linked by an edge to each vertex of X . In other words, $V' = V \cup \{z\}$ and $E' = E \cup E_z$, where $E_z = \{\{x, z\} \mid x \in V(X)\}$. Let us consider the map F' from E' to \mathbb{Z} such that, for any $u \in E$, $F'(u) = F(u)$ and for any $u \in E_z$, $F'(u) = k_{\min} - 1$, k_{\min} being the minimum value of F . Let Y be any subgraph of G and let Y' be the graph whose vertex and edge sets are respectively $V(Y) \cup \{z\}$ and $E(Y) \cup E_z$. It may be seen that Y' is a minimum spanning tree for F' in G' if and only if Y is a MSF relative to X for F in G .

The construction presented above can be easily generalized to any subgraph X of G . To this aim, in a preliminary step, each component of X must be contracted into a single vertex and, if two vertices of the contracted graphs must be linked by multiple edges, only the one with minimal value is kept.

A direct consequence of the construction presented above is that any minimum spanning tree algorithm can be used to compute a relative MSF. Many efficient algorithms (see a survey in [29]) exist in the literature for solving the minimum spanning tree problem. In particular, in a recent paper [30], B. Chazelle proposed a quasi-linear time algorithm. In the sequel of this paper, we will see that a better complexity can be reached to compute MSFs relative to the minima of F .

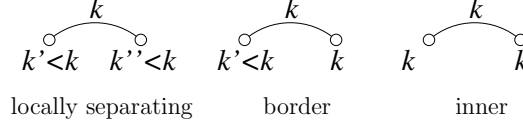


Fig. 4. Illustration of the different local configurations for edges.

4 Optimal thinnings

As seen in the previous section, a MSF relative to a subgraph of G can be computed by any minimum spanning tree algorithm. The best complexity for solving this problem is reached by the quasi-linear algorithm of Chazelle [30]. In this section, we introduce a new paradigm to compute MSFs relative to the minima of a map and obtain a linear algorithm. To this aim, we define a new thinning transformation that iteratively lowers the values of the edges that satisfy a simple local property. The minima of the transformed map constitute precisely a MSF relative to the minima of the original one. More remarkably, any MSF relative to the minima of a map can be obtained by this transformation. We discuss the possibility of parallel algorithms based on this transformation and give a sequential implementation (Algo. 1) which runs in linear time.

4.1 Border thinnings and watersheds

We introduce an edge classification based exclusively on local properties, *i.e.*, properties which depend only on the adjacent edges. This classification will be used in the definition of a lowering process (Def. 12) which allows to extract the watersheds of a map.

Remind that, if x is a vertex of G , $F(x)$ is the minimal altitude of an edge which contains x .

Definition 11 Let $u = \{x, y\} \in E$.

We say that u is *locally separating* (for F) if $F(u) > \max(F(x), F(y))$.

We say that u is *border* (for F) if $F(u) = \max(F(x), F(y))$ and $F(u) > \min(F(x), F(y))$.

We say that u is *inner* (for F) if $F(x) = F(y) = F(u)$.

Fig. 4 illustrates the above definitions. In Fig. 5a, $\{j, n\}$, $\{a, e\}$ and $\{b, c\}$ are examples of border edges; $\{i, m\}$ and $\{k, l\}$ are inner edges and both $\{h, l\}$ and $\{g, k\}$ are locally-separating edges. Note that any edge of G corresponds exactly to one of the types presented in Def. 11.

Let $u \in E$. The *lowering of F at u* is the map F' in \mathcal{F} such that:

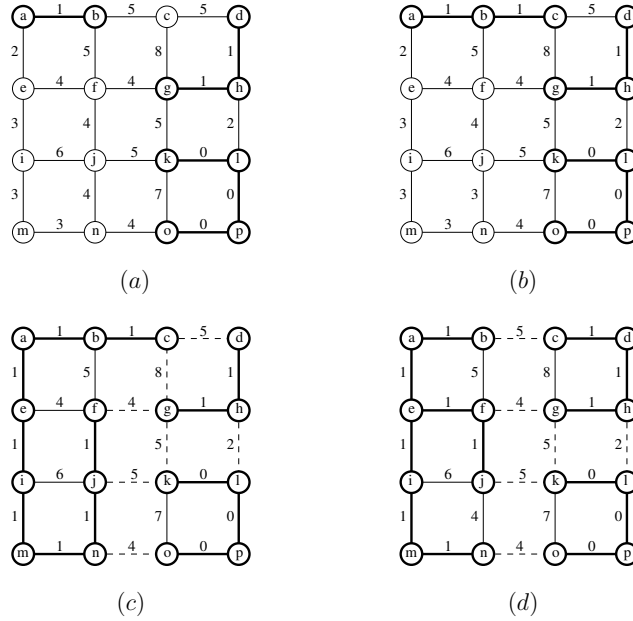


Fig. 5. A graph and some associated functions. The bold graphs superimposed are the minima of the corresponding functions; (b), a border thinning of (a); (c): a border kernel of both (a) and (b); and (d), another border kernel of (a). In (c) and (d), the border cuts are represented by dashed edges.

- $F'(u) = \min_{x \in u} \{F(x)\}$; and
- $F'(v) = F(v)$ for any edge $v \in E \setminus \{u\}$.

Definition 12 (border cut) *Let $H \in \mathcal{F}$. We say that H is a border thinning of F if:*

- i) $H = F$; or
- ii) there exists $I \in \mathcal{F}$ a border thinning of F such that H is the lowering of I at a border edge for I .

If there is no border edge for H , we say that H is a border kernel. If H is a border thinning of F and if it is a border kernel, we say that H is a border kernel of F .

If H is a border kernel of F , any cut for $M(H)$ is called a border cut for F .

To illustrate the previous definition, we assume that F (resp. H , I) is the map of Fig. 5a (resp. b,c). The maps H and I are border thinnings of F . The map I is a border kernel of both F and H . The function depicted in Fig. 5d is another border kernel of F which is not a border kernel of H . In Fig. 5c and d, the border cuts are represented by dashed edges. Remark that the minima of the two border kernels constitute forests relative to $M(F)$, and that all edges

which do not belong to the bold graphs are locally separating.

We now present an important result of this section which mainly states that the border kernels can be used to compute MSFs relative to the minima of a map.

Property 13 *Let $H \in \mathcal{F}$. If H is a border thinning of F , then any MSF relative to $M(H)$ (for H) is a MSF relative to $M(F)$ (for F). Furthermore, if H is a border kernel of F , then $M(H)$ is itself a MSF relative to $M(F)$ (for F).*

In other words, the border thinning transformation preserves some MSF relative to the minima of the original map and, moreover, the border kernels allow the extraction of MSFs relative to the minima. We remind that a MSF relative to the minima of a map defines a unique cut which is a watershed of this map. Thus, a border kernel of a map defines a unique border cut for this map. Hence, from Prop. 13, we can easily prove the following corollary which links border kernels to watershed cuts.

Corollary 14 *Any border cut of F is a watershed cut of F .*

Thanks to classical algorithms for minima computation, a MSF relative to $M(F)$ can be obtained from any border kernel of F . In fact, the minima of a border kernel can be extracted by a much more efficient strategy.

Property 15 *Let F be a border kernel. An edge u is in a minimum of F if and only if u is inner for F .*

Let H denote a border kernel of F . On the one hand, the map H and its minima can be derived from F exclusively by *local operations* (see Defs. 11, 12 and Prop. 15). On the other hand, a MSF relative to $M(F)$ is a *globally optimal structure*. The minima of H constitute, by Prop. 13, a MSF relative to $M(F)$. Thus, the local and order-independent operations presented in this section always produce a globally optimal structure.

This kind of local, order-independent operations can be efficiently exploited by dedicated hardware. For instance, raster scanning strategies for extracting a border cut can be straightforwardly derived. It has been shown that such strategies can be very fast on adapted hardware [31].

As mentioned above the property of a border edge can be tested locally. Thus, if a set of *independent* (i.e., mutually disjoint) border edges is lowered in parallel, then the resulting map is a border thinning. This property offers several possibilities of parallel watershed algorithms. In particular, efficient algorithms for array processors can be derived.

4.2 Linear-time algorithm for border cut

On a sequential computer, a naive algorithm to obtain a border kernel could be the following: *i*) for all $u = \{x, y\}$ of G , taken in an arbitrary order, check the values of $F(u)$, $F(x)$ and $F(y)$ and whenever u is border, lower the value of u down to the minimum of $F(x)$ and $F(y)$ (cost for checking all edges of G : $O(|E|)$); *ii*) repeat step *i*) until no border edge remains. Consider the graph G whose vertex set is $\{0, \dots, n\}$ and whose edge set is made of all the pairs $u_i = \{i, i+1\}$ such that $i \in [0, n-1]$. Let $F(u_i) = n-i$, for all $i \in [0, n-1]$. On this graph, if the edges are processed in the order of their indices, step *i*) will be repeated exactly $|E|$ times. The worst case time complexity of this naive algorithm is thus at least $O(|E|^2)$. In order to reduce the complexity, we introduce a second lowering process in which any edge is lowered at most once. This process is a particular case of border thinning which also produces, when iterated until stability, a border kernel of the original map. Thanks to this second thinning strategy, we derive a linear-time algorithm to compute border kernels and, thus, watersheds.

It may be seen that an edge which is in a minimum at a given step of a border thinning sequence never becomes a border edge. Thus, lowering first the edges adjacent to the minima seems to be a promising strategy. In order to study and understand this strategy, we may classify any inner, border or locally-separating edge with respect to the adjacent minima. We thus obtain the 8 cases illustrated in Fig. 6 and any edge is classified in exactly one of these classes depending on the values of its adjacent edges and on the regional minima. In this section we study, in particular, a transformation which iteratively lowers the values of the border edges adjacent to minima (see Fig. 6F).

Definition 16 *We say that an edge u in E is minimum-border (for F), written M-border, if u is border for F and if exactly one of the vertices in u is a vertex of $M(F)$.*

In Fig. 5a, the edge $\{c, d\}$ is M-border whereas $\{j, n\}$ is not.

Definition 17 (M-border cut) *Let $H \in \mathcal{F}$. We say that H is an M-border thinning of F if:*

- i) $H = F$; or*
- ii) there exists $I \in \mathcal{F}$ an M-border thinning of F such that H is the lowering of I at an M-border edge for I .*

If there is no M-border edge for H , we say that H is an M-border kernel. If H is an M-border thinning of F and if it is an M-border kernel, we say that H is an M-border kernel of F .

If H is an M-border kernel of F , any cut for $M(H)$ is called an M-border cut for F .

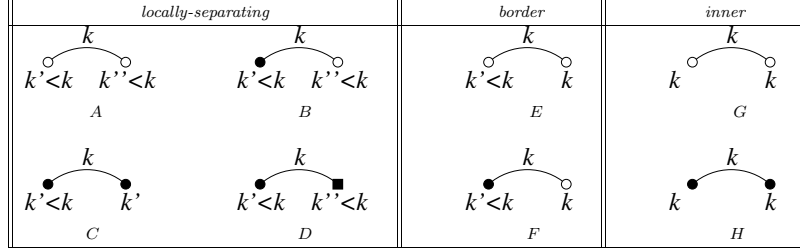


Fig. 6. Edge-classification in a weighted graph. In the figure, any black vertex belongs to a minimum and two vertices represented by different shapes (*i.e.*, square and circle) belong to distinct minima.

Observe (in Fig. 5ab for instance) that when a map is lowered at an M-border edge, one of its minima is “growing by one vertex”. The well-known watershed algorithms by simulation of a flooding [4, 6, 11] (see also [32]) also work as “region growing” processes. Intuitively, for a vertex-weighted graph, they can be described as follows: (i), mark the minima with distinct labels; (ii), mark the lowest point adjacent to a single label with this label; and (iii), repeat step (ii) until there is no point adjacent to a single label. In fact, as stated by the following property, the M-border thinning transformation –which is itself a particular case of border thinning– generalizes flooding algorithms.

If u is an edge with minimal altitude among all the edges outgoing from $M(F)$, then u is a *flooding edge* for F .

Property 18 *Any flooding edge for F is an M-border edge for F .*

The previous property also establishes a link with one [26] of the famous minimum spanning tree algorithms. Let us consider the construction presented in Sec. 3.2 for the computation of a MSF relative to $M(F)$. In this case, as stated by F. Meyer in [11], the edges considered by Prim’s algorithm are exactly those considered in a lowering sequence using the above condition to detect M-border edges. Prop. 18 thus gives us a clue to precisely determine the relation between M-border thinnings and MSFs relative to the minima. To this aim, let us formalize the notions of flooding kernel and cut.

Definition 19 (flooding cut) *Let $H \in \mathcal{F}$. We say that H is a flooding of F if $H = F$ or if there exists a flooding I of F such that H is the lowering of I at a flooding edge for I .*

If there is no flooding edge for H , we say that H is a flooding kernel. If H is a flooding of F and if it is a flooding kernel, we say that H is a flooding kernel of F . In this case, any cut for $M(H)$ is called a flooding cut for F .

Let $H \in \mathcal{F}$. We say that $M(H)$ is the *min-graph* of H . This notion will be used in the following property which states that, as well as the min-graphs

of border kernels, the min-graphs of M-border and flooding kernels of F are MSFs relative to $M(F)$. More remarkably, any MSF relative to $M(F)$ can be obtained as the min-graph of an M-border kernel, of a flooding kernel and also as the min-graph of a border kernel of F .

Lemma 20 *Let $X \subseteq G$. The four following statements are equivalent:*

- (i) X is the min-graph of a flooding kernel of F ;
- (ii) X is the min-graph of an M-border kernel of F ;
- (iii) X is the min-graph of a border kernel of F ; and
- (iv) X is a MSF relative to $M(F)$.

Since a relative MSF induces a unique graph cut, from the previous lemma, we immediately deduce that a flooding kernel (resp. an M-border kernel, a border kernel) of a map defines a unique flooding cut (resp. M-border cut, border cut). Hence, the following theorem which states the equivalence between watershed cuts, border cuts, M-border cuts and flooding cuts can be easily proved.

Theorem 21 *Let $S \subseteq E$. The four following statements are equivalent:*

- (i) S is a flooding cut for F ;
- (ii) S is an M-border cut for F ;
- (iii) S is a border cut for F ; and
- (iv) S is a watershed cut for F .

Using the notions introduced in this section, we derive Algo. 1, an efficient algorithm to compute M-border kernels, hence watershed cuts. We recall that an edge u is border for F if the altitude of one of its extremities equals the altitude of u and the altitude of the other is strictly less than the altitude of u .

Algorithm 1: M-Border

Data: (V, E, F) : an edge-weighted graph;

Result: F , an M-border kernel of the input map and M its minima.

```

1  $L \leftarrow \emptyset$  ;
2 Compute  $M(F) = (V_M, E_M)$  and  $F(x)$  for each  $x \in V$ ;
3 foreach  $u \in E$  outgoing from  $(V_M, E_M)$  do  $L \leftarrow L \cup \{u\}$  ;
4 while there exists  $u \in L$  do
5    $L \leftarrow L \setminus \{u\}$  ;
6   if  $u$  is border for  $F$  then
7      $x \leftarrow$  the vertex in  $u$  such that  $F(x) < F(u)$  ;
8      $y \leftarrow$  the vertex in  $u$  such that  $F(y) = F(u)$  ;
9      $F(u) \leftarrow F(x)$  ;  $F(y) \leftarrow F(u)$  ;
10     $V_M \leftarrow V_M \cup \{y\}$  ;  $E_M \leftarrow E_M \cup \{u\}$  ;
11    foreach  $v = \{y', y\} \in E$  such that  $y' \notin V_M$  do  $L \leftarrow L \cup \{v\}$  ;
```

In order to achieve a linear complexity, the graph (V, E) can be stored as an

array of lists which maps to each point the list of all its adjacent vertices. An additional mapping can be used to access in constant time the two vertices which compose a given edge. Nevertheless, for applications to image processing, and when usual adjacency relations are used, these structures do not need to be explicit.

Furthermore, to achieve a linear complexity, the minima of F must be known at each iteration. To this aim, in a first step (line 2), the minima of F are computed and represented by two boolean arrays V_M and E_M , the size of which are respectively $|V|$ and $|E|$. This step can be performed in linear time thanks to classical algorithms. Then, in the main loop (line 4), after each lowering of F (line 9), V_M and E_M are updated (line 10). In order to access, in constant time, the edges which are M-border, the (non-already examined) edges outgoing from the minima are stored in a set L (lines 3 and 11). This set can be, for instance, implemented as a queue. Thus, we obtain the following property.

Property 22 *At the end of Algorithm 1, F is an M-border kernel of the input function F . Furthermore Algorithm 1 terminates in linear time with respect to $|E|$.*

We emphasize that Algo. 1 does not require any sorting step nor the use of any hierarchical queue. Thus, whatever the range of the considered map, it runs in linear time with respect to the size of the input graph. To our best knowledge, this is the first watershed algorithm with such a property.

5 Streams and linear-time watershed algorithm

A watershed of any map can be computed in linear time thanks to Algo. 1. This algorithm, in a first step (line 2), extracts the minima of the input map. In this section, we introduce a second linear-time algorithm. As Algo. 1, it does not require any sorting step, nor the use of any hierarchical queue. Furthermore, contrarily to Algo. 1, it does not need minima precomputation. As far as we know, this algorithm has no equivalent in the literature.

In the first part of the section, the mathematical tools which allow to prove the correctness of the proposed algorithm are introduced. In particular, we propose a new notion of stream which is crucial to this paradigm. Then, the algorithm is presented, and both its correctness and complexity are analyzed.

Definition 23 *Let $L \subseteq V$. We say that L is a stream if, for any two points x and y of L , there exists, in L , either a path from x to y or from y to x , with steepest descent for F .*

Let L be a stream and let $x \in L$. We say that x is a top (resp. bottom) of L if the altitude of x is greater than (resp. less than) or equal to the altitude of

any $y \in L$.

Remark that if L is a stream and x is a bottom (resp. a top) of L , then, from any $y \in L$ to x (resp. from x to any $y \in L$), there is a path in L , with steepest descent for F . Notice that, whatever the stream L , there exists a top (resp. bottom) of L . Nevertheless, this top (resp. bottom) is not necessarily unique.

In order to illustrate the previous definitions, let us assume that G and F are the graph and the function depicted in Fig. 5a. The sets $L = \{a, b, e, i\}$ and $\{j, m, n\}$ are two examples of streams. On the contrary, the set $L' = \{i, j, k\}$ is not a stream since there is no path in L' , between i and k , with steepest descent for F . The sets $\{a, b\}$ and $\{i\}$ are respectively the set of bottoms and tops of L .

The algorithm which will be proposed in this section is based on the iterative extraction of streams. In order to build such a procedure, we study stream concatenation.

Let L_1 and L_2 be two disjoint streams (*i.e.*, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$) and let $L = L_1 \cup L_2$. We say that L_1 is *under* L_2 , written $L_1 \prec L_2$, if there exist a top x of L_1 , a bottom y of L_2 , and there is, from y to x , a path in L with steepest descent for F . Note that, if $L_1 \prec L_2$, then L is also a stream.

We say that a stream L is an \prec -stream if there is no stream under L .

In Fig. 5a the stream $\{a, b, e, i\}$ is under the stream $\{j, m, n\}$ and thus $\{a, b, e, i, j, m, n\}$ is also a stream. Furthermore, there is no stream under $\{a, b, e, i\}$ and $\{a, b, e, i, j, m, n\}$. Thus, these are two \prec -streams.

The streams extracted by our algorithm are \prec -streams. As said in the introduction, this algorithm does not require minima precomputation. In fact, there is a deep link between \prec -streams and minima.

Property 24 *Let L be a stream. The three following statements are equivalent:*

- (1) L is an \prec -stream;
- (2) L contains the vertex set of a minimum of F ; and
- (3) for any $y \in V \setminus L$ adjacent to a bottom x of L , $F(\{x, y\}) > F(x)$.

In Fig. 5a the two \prec -streams $\{a, b, e, i\}$ and $\{a, b, e, i, j, m, n\}$ contain the set $\{a, b\}$ which is the vertex set of a minimum of F .

Remark that any stream L which contains an \prec -stream is itself an \prec -stream. We also notice that if L is an \prec -stream, the set of all bottoms of L constitutes the vertex set of a minimum of F . Furthermore, a subset L of V is the vertex set of a minimum of F if and only if it is an \prec -stream minimal for the inclusion relationship, *i.e.*, no proper subset of L is an \prec -stream.

In order to partition the vertex set of G , from the \prec -streams of F , the vertices of the graph can be arranged in the following manner.

Let $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ be a set of n \prec -streams. We say that \mathcal{L} is a *flow family* if:

- $\cup\{L_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} = V$; and
- for any two distinct L_1 and L_2 in \mathcal{L} , if $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, then $L_1 \cap L_2$ is the vertex set of a minimum of F .

Let \mathcal{L} be a flow family and let $x \in V$. It may be seen that, either x belongs to a minimum of F (in this case, it may belong to several elements of \mathcal{L}), or x belongs to a unique \prec -stream of \mathcal{L} which itself contains the vertex set of a unique minimum of F . Thus, thanks to \mathcal{L} , we can associate to each vertex x of G a unique minimum of F .

Definition 25 Let \mathcal{L} be a flow family. Let us denote by M_1, \dots, M_n the minima of F . Let ψ be the map from V to $\{1, \dots, n\}$ which associates to each vertex x of V , the index (or label) i such that M_i is the unique minimum of F included in an \prec -stream of \mathcal{L} which contains x ; we say that ψ a flow mapping of F .

If ψ is a flow mapping of F , we say that the set $S = \{\{x, y\} \in E \mid \psi(x) \neq \psi(y)\}$ is a flow cut for F .

The next proposed algorithm produces a flow mapping, hence a flow cut. The following theorem, which is a consequence of the definitions of flow families and basin cuts and of the consistency theorem, states the equivalence between flow cuts and watersheds. It constitutes the main tool to establish the correctness of Algo. 2.

Theorem 26 Let $S \subseteq E$. The set S is a watershed of F if and only if S is a flow cut for F .

We now present Algo. 2 which computes a flow mapping, hence, by Th. 26, a watershed. It iteratively assigns a label to each point of the graph. To this aim, from each non-labeled point x , a stream L composed of non-labeled points and whose top is x is computed (line 4). If L is an \prec -stream (line 5), a new label is assigned to the points of L . Otherwise (line 8), there exists an \prec -stream L_1 under L and which is already labeled. In this case, the points of L receive the label of L_1 (line 9). The function **Stream**, called at line 4, allows to compute the stream L . Roughly speaking, it performs an intermixed sequence of depth-first and breadth-first exploration of the paths with steepest descent. The main invariants of the function **Stream** are: *i*), the set L is, at each iteration, a stream; and *ii*), the set L' is made of all non-already explored bottoms of L . The function halts at line 17 when all bottoms of L have been explored or, at line 9, if a point z already labeled is found. In the former case, by Prop. 24, the returned set L is an \prec -stream. In the latter case, the label lab

of z is also returned and there exists a bottom y of L such that $\langle y, z \rangle$ is a path with steepest descent. Thus, there is an \prec -stream L_1 , under L , included in the set of all vertices labeled lab . Thus, by the preceding remarks, the output of Algo. 2 is a flow mapping of F . Furthermore, using the data structures presented in Sec. 4.2, we obtain a linear complexity.

Algorithm 2: Watershed

Data: (V, E, F) : an edge-weighted graph;
Result: ψ : a flow mapping of F .
1 **foreach** $x \in V$ **do** $\psi(x) \leftarrow NO_LABEL$;
2 $nb_labs \leftarrow 0$; /* the number of minima already found */
3 **foreach** $x \in V$ such that $\psi(x) = NO_LABEL$ **do**
4 $[L, lab] \leftarrow \text{Stream}(V, E, F, \psi, x)$;
5 **if** $lab = -1$ **then** /* L is an \prec -stream */
6 $nb_labs ++$;
7 **foreach** $y \in L$ **do** $\psi(y) \leftarrow nb_labs$;
8 **else**
9 **foreach** $y \in L$ **do** $\psi(y) \leftarrow lab$;

Function Stream(V, E, F, ψ, x)

Data: (V, E, F) : an edge-weighted graph; ψ : a labeling of V ; x : a point in V .
Result: $[L, lab]$ where L is a stream such that x is a top of L , and lab is either the label of an \prec -stream under L , or -1 .
1 $L \leftarrow \{x\}$;
2 $L' \leftarrow \{x\}$; /* the set of non-explored bottoms of L */
3 **while** there exists $y \in L'$ **do**
4 $L' \leftarrow L' \setminus \{y\}$;
5 $breadth_first \leftarrow TRUE$;
6 **while** ($breadth_first$) and (there exists $\{y, z\} \in E$ such that $z \notin L$ and $F(\{y, z\}) = F(y)$) **do**
7 **if** $\psi(z) \neq NO_LABEL$ **then**
8 /* there is an \prec -stream under L already labelled */
9 **return** $[L, \psi(z)]$;
10 **else if** $F(z) < F(y)$ **then**
11 $L \leftarrow L \cup \{z\}$; /* z is now the only bottom of L */
12 $L' \leftarrow \{z\}$; /* hence, switch to depth-first exploration */
13 $breadth_first \leftarrow FALSE$;
14 **else**
15 $L \leftarrow L \cup \{z\}$; /* $F(z) = F(y)$, thus z is also a bottom of L */
16 $L' \leftarrow L' \cup \{z\}$; /* continue breadth-first exploration */
17 **return** $[L, -1]$;

Property 27 *Algorithm 2 outputs a map ψ which is a flow mapping of F . Furthermore, Algorithm 2 runs in linear-time with respect to $|E|$.*

Remark that, in function **Stream**, the use of breadth-first iterations is required to ensure that the produced set L is always an \prec -stream. Otherwise, if only depth-first iterations were used, **Stream** could be stuck on plateaus (*i.e.*, connected subgraphs of G with constant altitude) since some bottoms of L would never be explored.

6 Watersheds, shortest-path forests and topological watersheds

An interesting feature of the framework settled in this paper is that it allows to understand the links and differences between several methods used in image segmentation. Thanks to relative MSFs and border kernels, we provide a mathematical comparison between watershed cuts and:

- shortest-path forests (the theoretical basis of the Image Foresting Transform (IFT) [12] and the fuzzy connected image segmentation [15, 33]); and
- topological watersheds [7, 8].

6.1 Connection Value

The connection value [8, 10, 34] (also called degree of connectivity [35] or fuzzy connectedness [14] up to an inversion of F) may be seen as a measure of contrast between two subgraphs. This notion is central to both topological watersheds and shortest-path forests. We begin the section by defining the connection value. Then, we show that any MSF relative to a subgraph of G “preserves” the connection values.

Definition 28 *Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be a path in G . If π is non-trivial, we set $F(\pi) = \max\{F(\{x_{i-1}, x_i\}) \mid i \in [1, l]\}$. If π is trivial, we set $F(\pi) = F(x_0)$. Let X and Y be two subgraphs of G , we denote by $\Pi(X, Y)$ the set of all paths from X to Y in G . The connection value between X and Y (in G and for F) is $F(X, Y) = \min\{F(\pi) \mid \pi \in \Pi(X, Y)\}$.*

Let X be any subgraph of G . The following theorem asserts that, if the connection value between two components of X is equal to k , then the connection value between the two corresponding components in any MSF relative to X is also k : relative MSFs preserve the connection values.

Theorem 29 *Let X be a subgraph of G . If Y is a MSF relative to X , then for any two distinct components A and B of X , we have $F(A, B) = F(A', B')$,*

where A' and B' are the two components of Y such that $A \subseteq A'$ and $B \subseteq B'$.

For example, in Fig. 5a, the connection value between the two minima at altitude 1 is equal to 4. It can be verified that the connection value between the two corresponding components of the MSFs relative to the minima, depicted in Figs. 5c and d, is also 4.

Let $S \subseteq E$ be a watershed cut of F . As a corollary of Th. 29, it may be deduced that the connection value between two distinct catchment basins (*i.e.*, two components of \bar{S}) is equal to the connection value between the two corresponding minima of F . To put it briefly, watershed cuts preserve the connection value.

6.2 Shortest-path forests

We investigate the links between relative MSFs and shortest-path forests. The image foresting transform [12], the inter-pixel flooding watershed [4, 6], and the relative fuzzy connected image segmentation [14, 15, 33, 36] fall in the scope of shortest-path forests. Roughly speaking these methods partition the graph into connected components associated to seed points. The component of each seed consists of the points that are “more closely connected” to this seed than to any other. In many cases, in order to define the relation is “more closely connected to”, the chosen measure is precisely the connection value, *i.e.*, a path π' is considered as shorter than a path π whenever $F(\pi') < F(\pi)$. The resulting regions are then given by a shortest-path forest. We show that any MSF relative to a subgraph X is a shortest-path spanning forest relative to X and that the converse is not true. Furthermore, we prove that both concepts are equivalent whenever X corresponds to the minima of the considered map.

If x is a vertex of G , to simplify the notation, the graph $(\{x\}, \emptyset)$ will be also denoted by x . Let X and Y be two subgraphs of G . We say that Y is a *shortest-path forest relative to X* if Y is a forest relative to X and if, for any $x \in V(Y)$, there exists, from x to X , a path π in Y such that $F(\pi) = F(x, X)$. If Y is a shortest-path forest relative to X and $V(Y) = V$, we say that Y is a *shortest-path spanning forest relative to X* . In this case, the unique cut induced by Y is a *SPF cut for X* .

Let G be the graph in Fig. 7 and let F be the corresponding map. Let X, Y, Z be the bold graphs depicted in respectively Figs. 7a, b and c. The two graphs Y and Z are shortest-path spanning forests relative to X .

Property 30 *Let X and Y be two subgraphs of G . If Y is a MSF relative to X , then Y is a shortest-path spanning forest relative to X . Furthermore, any MSF cut for X is a SPF cut for X .*

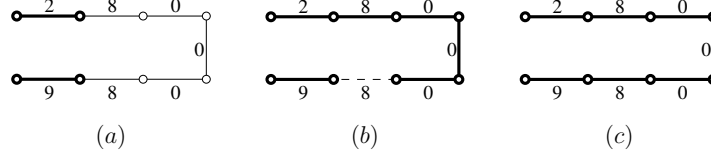


Fig. 7. A graph G and a function F . The bold edges and vertices represent: (a), a graph X ; (b), a MSF relative to X ; (c), a shortest-path spanning forest relative to X which is not a MSF relative to X .

The converse of Prop. 30 is, in general, not true. For example, the graph Z (Fig. 7c), is a shortest-path spanning forest relative to the graph X (Fig. 7a) whereas it is not a MSF relative to this graph. On the same example (Fig. 7c) we can also observe that, contrarily to relative MSFs, shortest-path spanning forests do not always preserve the connection value (in the sense of Th. 29). In particular, in Fig. 7, the connection value between the two components of X is equal to 8, whereas the connection value between the two components of Z is equal to 0. Then, on the contrary of cuts induced by relative MSFs (see for instance Fig. 7b), the cuts induced by shortest-path spanning forests are not necessarily located on the “crests” of the function.

In fact, as stated by the following property, if the graph X constitutes precisely the minima of F , the equivalence between both concepts can be established.

Property 31 *Let X be a subgraph of G . A necessary and sufficient condition for X to be a shortest-path spanning forest relative to $M(F)$ is that X is a MSF relative to $M(F)$. Furthermore, a subset of E is a MSF cut for $M(F)$ if and only if it is a SPF cut for $M(F)$.*

Whereas the notions of shortest-path forests and relative MSFs are equivalent when extensions of the minima are considered, in the general case, the relative MSFs satisfy additional interesting properties, such as the preservation of the connection value or the optimality (in the sense of Def. 8). Relative MSFs thus constitute a method of choice for marker (seed) based segmentation procedures, an illustration of which is provided in Sec. 7.2.

6.3 Topological watershed

The notions of a W-thinning and a topological watershed, introduced in [7], allow to rigorously define the watersheds of a vertex-weighted graph and to prove important properties (see [8–10]) not guaranteed by most popular watershed algorithms for vertex-weighted graphs. In particular, in [8, 10], the equivalence between a class of transformations which preserves the connection value and the W-thinnings is proved. Thus, Th. 29 invites us to recover the

links between watershed cuts and topological watersheds.

The W-thinnings and topological watersheds are defined for graphs whose vertices are weighted by a cost function (denoted by I in the following). For that purpose, we introduce a minimal set of definitions to handle this framework.

Let $P \subseteq V$. The *subgraph of G induced by P* , denoted by G_P , is the graph whose vertex set is P and whose edge set is made of all edges of G linking two points in P , i.e., $G_P = (P, \{\{x, y\} \in E \mid x \in P, y \in P\})$. Let I be a map from V to \mathbb{Z} , and let $k \in \mathbb{Z}$. We denote by $\bar{I}[k]$ the subgraph of G induced by the set of all points $x \in V$ such that $I(x) < k$; $\bar{I}[k]$ is called a (*level k*) *lower-section* of I .

Definition 32 *Let I be a map from V to \mathbb{Z} .*

*Let x in V and $k = I(x)$. If x is adjacent to exactly one component of $\bar{I}[k]$, we say that x is *W-destructible* for I .*

*Let J be a map from V to \mathbb{Z} . We say that J is a *W-thinning* of I (in G) if $J = I$ or if J may be derived from I by iteratively lowering the values of *W-destructible* points by one.*

*We say that J is a *topological watershed* of I if J is a *W-thinning* of I and if there is no *W-destructible* point for J .*

Let us consider the map I depicted in Fig. 8d. The points at altitude 2 are both *W-destructible* whereas the point at altitude 5 is not. The maps J and K depicted, respectively, in (e) and (f) are *W-thinnings* of I . The interested reader can verify that there exists a sequence of maps which allows to obtain J (resp. K) from I by iteratively lowering by one the values of *W-destructible* points. Notice that J is a *topological watershed* of I , since there is no *W-destructible* point for J . On the other hand, K is not a *topological watershed* of I , indeed the points with altitude 10, 6 or 4 are *W-destructible*.

We now present the notion of line graph (see [37], and [32,38,39] for topological watershed properties in this framework). This concept provides a simple way to automatically infer definitions and properties from vertex-weighted graphs to edge-weighted graphs.

Definition 33 *The line graph of $G = (V, E)$ is the graph (E, Γ) , such that $\{u, v\}$ belongs to Γ whenever $u \in E$, $v \in E$, and u and v are adjacent, i.e., $|u \cap v| = 1$.*

To each graph G whose edges are weighted by a cost function F , we can associate its line graph G' . The vertices of G' are weighted by F and thus any transformation of F can be performed either in G or in G' . Fig. 8 illustrates such a procedure. Let G be the graph depicted in (a), (b) and (c). The line graph of G is depicted in (d), (e) and (f). The map shown in (b) and (e) is a *topological watershed* of the one shown in (a) and (d). The map in (c) and (f)

is a border kernel.

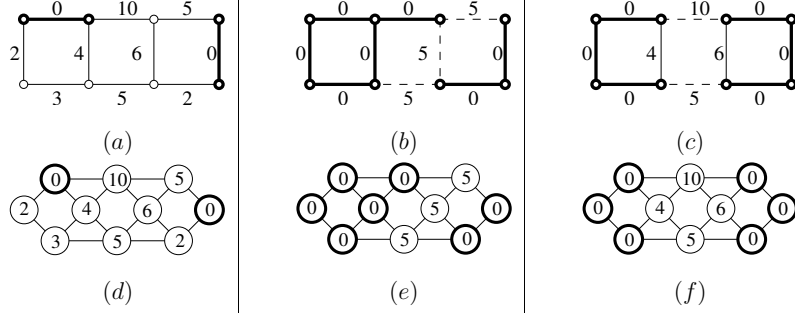


Fig. 8. Illustration of line graphs and topological watersheds. The graph in (d) (resp. (e), (f)) is the line graph of the one in (a) (resp. (b), (c)). The minima of the associated functions are depicted in bold. (c, f): the map is a border kernel of the one in (a, d); (b, e) and (c, f): the maps are W-thinnings of (a, d); the map in (b, e) is furthermore a topological watershed of the one in (a, d).

Definition 34 Let $S \subseteq E$. We say that S is a topological cut for F , if there exists a W-thinning H of F in the line graph of G such that S is the only cut for $M(H)$.

Property 35 Let $H \in \mathcal{F}$. If H is a border thinning of F in G , then H is a W-thinning of F in the line graph of G . Furthermore, any border cut for F is a topological cut for F .

The previous property is illustrated in Fig. 8 where the map depicted in Fig. 8c is a border thinning of F (Fig. 8a), thus a W-thinning of F . The converse of Prop. 35 is not true. The map H (Fig. 8b) is a topological watershed of F but it is not a border kernel of F . Indeed, there is no MSF relative to the minima of F associated to the cut produced by the topological watershed H . Observe, in particular, that the produced cut is not located on the highest “crests” of the original map F .

An important consequence of Prop. 35 is that border cuts (hence, by Th. 20, watershed cuts) directly inherit all the properties of W-thinnings and topological watersheds proved for vertex-weighted graphs [8–10].

In recent papers [32, 38, 39], we have studied and proposed solutions to some of the problems encountered by region merging methods which consider frontiers made of vertices as initial segmentations. In particular, we have introduced an adjacency relation on \mathbb{Z}^n which is adapted for region merging. An important property (Prop. 54 in [38]) is that the induced grids, called the perfect fusion grids, are line graphs. If we consider a map which assigns a weight to the vertices of such a grid, then the set of definitions and properties given in this

paper are still valid. Thus, the perfect fusion grids constitute an interesting alternative for defining a watershed of an image which is based on vertices and which satisfies the drop of water principle.

7 Illustrations and experimental results

In order to illustrate the notions introduced in this paper, we present two segmentation schemes based on watersheds and relative MSFs. In Sec. 7.1, we derive, from the classical framework of mathematical morphology, a segmentation scheme that allows to automatically segment an image into a predefined number of regions. It consists of the three following steps: (i), computation of a simple function that assigns a weight to the edges of the 4-adjacency graph associated to the image; (ii), filtering of this cost function in order to reduce the number of minima; and (iii) computation of a watershed of the filtered cost function. The second illustration (Sec. 7.2) presents some results of relative MSF, used as a semi-automatic segmentation tool. At last, we provide computation times of several watershed algorithms including the two that are proposed in this paper.

7.1 Segmentation into k regions

In order to illustrate the use of watersheds in practical applications, we adapt a classical scheme of morphological segmentation. We assume that the set V is the domain of a 2-dimensional image, more precisely, of a rectangular subset of \mathbb{Z}^2 . A grayscale image I is a map from the set of pixels V to a subset of the positive integers. For any $x \in V$, the value $I(x)$ is the intensity at pixel x . We consider the 4-adjacency relation [17] defined by: $\forall x, y \in V, \{x, y\} \in E$ iff $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$, where $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$. We consider the map F , from E to \mathbb{Z} , defined for any $\{x, y\} \in E$ by $F(\{x, y\}) = |I(x) - I(y)|$. Notice that more elaborated formulations can be used to define the cost function F (see [40, 41] or an adaptation of [42]).

A watershed of F would contain to many catchment basins. Over-segmentation is a well known feature of all grayscale watersheds due to the huge number of local minima. In order to suppress many of the non-significant minima, a classical approach consists of computing morphological closing of the function [43, 44]. In particular, attribute filters [45] (area, dynamic, volume) have shown to be successful tools. For this illustration, we adapt a classical attribute filter to the case of edge-weighted graphs.

The intuitive idea of this filter is to progressively “fill in” the minima of the

map F that are not “important enough”. To make such an idea practicable, it is necessary to quantify the relative importance of a minimum. To this aim, let us define the *area* of a subgraph of G (*e.g.*, a minimum of F) as the number of its vertices. In order to “fill in” a less significant minimum M of F (according to its area), we consider the transformation that consists of increasing by one the altitude of any edge of M . A common issue in image analysis is to segment an image into k regions (where k is a predefined number). To reach this goal thanks to watershed cut, we need a cost function which contains exactly k minima. The map F is thus filtered by iterating the above transformation until F contains k minima (see [46] for an efficient implementation).

In Figs. 9a,b, we present the results which have been obtained on the camera-man image. Here, k is set to 22. In order to evaluate this result, we also use a similar approach settled in the framework of vertex-weighted graph. More precisely, it consists of: (i), computation of a gradient magnitude image: either the Deriche’s optimal edge detector [42] in Figs. 9c,d or the morphological gradient (see, for instance, chapter 3.10.1 in [47]) in Figs. 9e,f; (ii), area filtering ($k = 22$) of the gradient; followed by (iii), computation of a watershed by flooding (without dividing line, see [4] or [13]) of the filtered function. Observe, in particular, the quality of the delineation of the man’s face in (b) compared to (d) and (f).

7.2 Semi-automatic scheme for image segmentation

Another classical procedure in mathematical morphology consists of using the watershed in an interactive manner. In this procedure, the user “paints”, on the image, some markers corresponding to objects that have to be segmented. Actually, the action of “painting” corresponds to the selection of some vertices of the underlying graph. Let M be this set of vertices. From the set M the subgraph M^+ whose vertex set is M and whose edge set is made of the edges of G which have their extremities in M , (*i.e.*, $M^+ = (M, \{\{x, y\} \in E \text{ with } x \in M, y \in M\})$) is extracted. Then, a MSF relative to M^+ is computed. Here, we use a Prim-like minimum spanning tree algorithm [26]. We note that it is possible to efficiently compute minimum spanning trees by an algorithm which consists of a succession of watersheds [48]. Such an algorithm could be also used to produce relative MSFs.

This interactive segmentation procedure is illustrated in Figs. 10a,b and c. For comparison purpose, we also compute the watershed by flooding from markers [4] of the gradient magnitude (the Deriche optimal edge detector [42] in Figs. 10d and morphological gradient in Figs. 10e). We can observe the quality of the delineation in 10c, compared to (d) and (e). See, in particular, the behavior of our approach in low contrasted zones and in the thin parts of

the apple.

7.3 Computation times of watershed algorithms

In Fig. 11, computation times (on a conventional personal computer) of several watershed algorithms are plotted for different image sizes. Minima precomputation is included in the execution time of the algorithms that have such a requirement. For each image size, the plotted values correspond to the mean time over ten tested images. Remark that, in accordance with the theoretical study, the two algorithms proposed in this paper are the fastest ones. For example, Flow Cut Algorithm runs five times faster than Meyer's flooding algorithm for images of 2048^2 pixels.

Conclusion

Fig. 12 provides a summary of the main results of this paper. In a unifying framework of edge-weighted graphs, we have shown strong links existing between several paradigms linked to the notion of watershed: topographical paradigms, grayscale transforms paradigms and optimality paradigms. To this aim, we introduced new watershed notions (watershed, basin, border and M-border cuts) and proved the equivalence between watershed cuts, basin cuts, flooding cuts, border cuts, M-border cuts, SPF cuts relative to the minima and MSF cut relative to the minima. Furthermore, we have shown that all these cuts are topological cuts, and thus inherit the mathematical properties of topological watersheds. We proposed two original algorithms (based on grayscale transforms and topographical paradigms) to compute watershed cuts. These two algorithms run in linear time whatever the range of the input function. To our best knowledge, these are the first watershed algorithms satisfying such a property. Furthermore, according to our experiments, they are also the fastest ones. Finally, the defined concepts have been illustrated in image segmentation leading to the conclusion that our approach can be applied for improving the quality of segmentation methods based on watershed.

On the one hand, future works will be focused on hierarchical segmentation schemes based on watersheds (including *geodesic saliency of watershed contours* [49] and *incremental MSFs*) as well as on watershed in weighted simplicial complexes, an image representation adapted to the study of topological properties. On the other hand, we will study a new minimum spanning tree algorithm based on watersheds.

References

- [1] J. Maxwell, On hills and dales, *Philosophical Magazine* 4/40 (1870) 421–427.
- [2] C. Jordan, Nouvelles observations sur les lignes de faîtes et de thalweg, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 75 (1872) 1023–1025.
- [3] S. Beucher, C. Lantuéjoul, Use of watersheds in contour detection, in: *Procs. of the International Workshop on Image Processing Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*, 1979.
- [4] F. Meyer, Un algorithme optimal de ligne de partage des eaux, in: *Procs. of 8ème Congrès AFCET*, Lyon-Villeurbanne, France, 1991, pp. 847–859.
- [5] L. Vincent, P. Soille, Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13 (6) (1991) 583–598.
- [6] S. Beucher, F. Meyer, The morphological approach to segmentation: the watershed transformation, E. Dougherty (Ed.), *Mathematical Morphology in Image Processing*, Marcel Dekker (1993) 443–481.
- [7] M. Couprie, G. Bertrand, Topological grayscale watershed transform, in: *Procs. of SPIE Vision Geometry V*, Vol. 3168, 1997, pp. 136–146.
- [8] G. Bertrand, On topological watersheds, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2-3) (2005) 217–230.
- [9] M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Quasi-linear algorithms for the topological watershed, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2-3) (2005) 231–249.
- [10] L. Najman, M. Couprie, G. Bertrand, Watersheds, mosaics and the emergence paradigm, *Discrete Applied Mathematics* 147 (2-3) (2005) 301–324.
- [11] F. Meyer, Minimum spanning forests for morphological segmentation, in: *Procs. of the second international conference on Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, 1994, pp. 77–84.
- [12] A. X. Falcão, J. Stolfi, R. de Alencar Lotufo, The image foresting transform: theory, algorithm and applications, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 26 (2004) 19–29.
- [13] R. Lotufo, A. Falcão, The ordered queue and the optimality of the watershed approaches, in: *Procs. of the 5th International Symposium on Mathematical Morphology*, 2000, pp. 341–350.
- [14] J. K. Udupa, S. Samarsekara, Fuzzy connectedness and object definition: Theory, algorithms, and applications in image segmentation, *Graphical Models and Image Processing* 58 (1996) 246–261.

- [15] P. K. Saha, J. K. Udupa, Relative fuzzy connectedness among multiple objects: Theory, algorithms, and applications in image segmentation, *Computer Vision and Image Understanding* 82 (2001) 42–56.
- [16] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.
- [17] T. Kong, A. Rosenfeld, Digital topology: Introduction and survey, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 48 (3) (1989) 357–393.
- [18] E. Dahlhaus, D. Johnson, C. Papadimitriou, P. Seymour, M. Yannakakis, Complexity of multiway cuts, in: *Procs. of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, 1992, pp. 241–251.
- [19] F. Meyer, Topographic distance and watershed lines, *Signal Processing* 38 (1) (1993) 113–125.
- [20] L. Najman, M. Schmitt, Watershed of a continuous function, *Signal Processing* 38 (1) (1993) 68–86.
- [21] P. Soille, C. Gratin, An efficient algorithm for drainage network extraction on DEMs, *Journal of Visual Communication and Image Representation* 5 (2) (1994) 181–189.
- [22] J. B. T. M. Roerdink, A. Meijster, The watershed transform: Definitions, algorithms and parallelization strategies, *Fundamenta Informaticae* 41 (1-2) (2001) 187–228.
- [23] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie, The drop of water principle: comparison of classical watershed algorithms, Technical report In preparation.
- [24] J. Nešetřil, E. Milková, H. Nešetřilová, Otakar Borůvka on minimum spanning tree problem. Translation of both 1926 papers, comments, history, *Discrete Mathematics* 233 (2001) 3–36.
- [25] J. Kruskal, On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem, *procs. Amer. Math. Soc.* 7 (1956) 48–50.
- [26] R. Prim, Shortest connection networks and some generalizations, *Bell Syst. Tech. J.* 36 (1957) 1389–1401.
- [27] R. L. Graham, P. Hell, On the history of the minimum spanning tree problem, *Annals of the History of Computing* 7 (1985) 43–57.
- [28] C. Zahn, Graph-theoretical methods for detecting and describing gestalt clusters, *IEEE Transactions on Computers* C-20 (1) (1971) 99–112.
- [29] T. H. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, *Introduction to algorithms*, second edition, MIT Press, 2001.
- [30] B. Chazelle, A minimum spanning tree algorithm with inverse-Ackermann type complexity, *Journal of the ACM* 47 (2000) 1028–1047.
- [31] A. N. Moga, T. Viero, M. Gabbouj, M. Nölle, G. Schreiber, H. Burkhardt, Parallel watershed algorithm based on sequential scanning, in: *Procs. of IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 1995.

-
- [32] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Grayscale watersheds on perfect fusion graphs, in: *Procs. of the 11th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, Vol. LNCS 4040, 2006, pp. 60–73.
- [33] R. Audigier, R. A. Lotufo, Duality between the watershed by image foresting transform and the fuzzy connectedness segmentation approaches, in: *Procs. of the XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*, 2006, pp. 53–60.
- [34] G. Bertrand, On the dynamics, Image and Vision Computing to appear.
- [35] A. Rosenfeld, On connectivity properties of grayscale pictures, *Pattern Recognition* 16 (1983) 47–50.
- [36] J. K. Udupa, P. K. Saha, R. A. Lotufo, Relative fuzzy connectedness and object definition: Theory, algorithms, and applications in image segmentation, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24 (11) (2002) 1485–1500.
- [37] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1970.
- [38] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie, L. Najman, Fusion graphs: merging properties and watershed, submitted. Also in technical report IGM2005-04 (2006).
URL <http://igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2005/04.pdf>
- [39] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie, L. Najman, Fusion graphs, region merging and watersheds, in: *Procs. of the 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Vol. LNCS 4245, 2006, pp. 343–354.
- [40] P. K. Saha, J. K. Udupa, D. Odhner, Scale-based connected image segmentation: Theory, algorithms and validation, *Computer Vision and Image Understanding* 77 (2000) 145–174.
- [41] Y. Zhuge, J. K. Udupa, P. K. Saha, Vectorial scale-based fuzzy-connected image segmentation, *Computer Vision and Image Understanding* 101 (2006) 177–193.
- [42] R. Deriche, Using Canny’s criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector, *The International Journal of Computer Vision* 1 (2) (1987) 167–187.
- [43] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. II: Theoretical Advances, Academic Press, 1988.
- [44] J. Serra, L. Vincent, An overview of morphological filtering, *Circuits Systems Signal Process* 11 (1) (1992) 48–107.
- [45] E. Breen, R. Jones, Attribute openings, thinnings and granulometries, *Computer Vision and Image Understanding* 64 (3) (1996) 377–389.
- [46] L. Najman, M. Couprie, Building the component tree in quasi-linear time, *IEEE Trans. Image Processing* 15 (11) (2006) 3531–3539.
- [47] P. Soille, *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, 1999.

- [48] J. Cousty, L. Najman, G. Bertrand, M. Couprie, Minimum spanning tree by watershed in preparation.
- [49] L. Najman, M. Schmitt, Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 18 (12) (1996) 1163–1173.

A Proofs

This appendix section, which is to be published in Digital Library as supplemental materials, provides the proofs of the properties given in this article.

A.1 Proof of Sec. 2

The following lemma is a direct consequence of the definition of a minimum.

Lemma 36 *Let $P \subseteq V, P \neq \emptyset$. If there is no vertex of $M(F)$ in P , then there exists an edge $u = \{x, y\}$ of G such that $x \in P$, $y \in V \setminus P$, and $F(u)$ is less than or equal to the altitude of any vertex in P .*

Proof of Th. 6:

(ii) Suppose that S is a basin cut of F . Let $u = \{x_0, y_0\}$ be any edge in S . There exists $\pi_1 = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ (resp. $\pi_2 = \langle y_0, \dots, y_m \rangle$) a path with steepest descent from x_0 (resp. y_0) to $M(F)$. By definition of a cut, x_0 and y_0 are in two distinct connected components of \bar{S} . Thus, since \bar{S} is an extension of $M(F)$, x_l and x_m are necessarily in two distinct minima of F . Whenever π_1 (resp. π_2) is not trivial, by definition of a path with steepest descent, $F(\{x_0, x_1\}) = F(x_0)$ (resp. $F(\{y_0, y_1\}) = F(y_0)$). Hence, $F(\{x_0, x_1\}) \leq F(\{x_0, y_0\})$ (resp. $F(\{y_0, y_1\}) \leq F(\{x_0, y_0\})$). Hence, since by definition \bar{S} is an extension of $M(F)$, S is a watershed cut of F .

(ii) Suppose now that S is not a basin cut of F . If \bar{S} is not an extension of $M(F)$, S is not a watershed of F . Suppose now that \bar{S} is an extension of $M(F)$. Thus, there exists a point $x \in V$ such that there is no path with steepest descent in \bar{S} from x to $M(F)$ (otherwise S would be a basin cut of S). Let P be the set of all points of G that can be reached from x by a path with steepest descent in \bar{S} . By hypothesis, none of the points in P is a vertex of $M(F)$. We denote by T the set of all edges with minimal altitude among the edges $\{y, z\}$ such that $y \in P$, $z \in V \setminus P$. Let $v = \{y, z\} \in T$ such that $y \in P$. Since none of the vertices of P is a vertex of $M(F)$, from Lem. 36, we can deduce that $F(y) = F(\{y, z\})$. Thus, there is, from x to z , a path in G , with steepest descent for F . Since z is not in P , there is no such path in \bar{S} . Thus, $v \in S$ and $T \subseteq S$. Again, let us consider $v = \{y, z\} \in T$. Let $\pi = \langle y_0 = y, \dots, y_l \rangle$ be any descending path in \bar{S} from y to $M(F)$. If such a path does not exist, then S is not a watershed: the proof is done. Suppose now that such a path exists. There exists $k \in [1, l]$ such that $y_{k-1} \in P$ and $y_k \in V \setminus P$. Since any edge in T is in S and since $\{y_{k-1}, y_k\}$ is in \bar{S} , $F(\{y_{k-1}, y_k\}) > F(v)$. Thus, as π is descending, $F(\{y_0, y_1\}) > F(v)$. Thus, the edge v , which belongs to S , does not satisfy the condition for the edges in a watershed: S is not a watershed. \square

A.2 Proofs of Sec. 3

Before proving the properties of Sec. 3, let us state the following propositions whose proofs are elementary.

Thanks to the construction presented in Sec. 3.2, we can derive, from classical properties of trees, the following properties.

Let $X \subseteq G$, $u \in E(X)$. We write $X \setminus u$ for $(V(X), E(X) \setminus \{u\})$. Let $v \in E \setminus E(X)$. We write $X \cup v$ for the graph $(V(X) \cup v, E(X) \cup \{v\})$.

Lemma 37 *Let X be a subgraph of G and let Y be a spanning forest relative to X . If for any $u \in E(Y) \setminus E(X)$ and $v \in E \setminus E(Y)$ such that $(Y \setminus u) \cup v$ is a spanning forest relative to X , we have $F(u) \leq F(v)$, then Y is a MSF relative to X .*

Lemma 38 *Let X be a subgraph of G and Y be a spanning forest relative to X . If $u = \{x, y\} \in E(Y) \setminus E(X)$, then there exists a unique component of $Y \setminus u$ which does not contain a component of X . Furthermore, either x or y is a vertex of this component.*

Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be a path in G . We say that π is a *simple path* if for any two distinct i and j in $[0, l]$, $x_i \neq x_j$. We say that π is an \mathcal{M} -path (for F) if π is a *simple path*, if x_l is a vertex of $M(F)$ and if none of x_0, \dots, x_{l-1} is a vertex of $M(F)$. Remark that an \mathcal{M} -path does not contain any edge of $M(F)$. Furthermore, it may be seen that if Y is a forest relative $M(F)$, there exists a unique \mathcal{M} -path from each vertex of Y .

Proof of Lem. 9:

(i) Suppose that there exists x_0 , a vertex of X such that there is no path from x_0 to $M(F)$, with steepest descent for F . We are going to prove that X is not a MSF relative to $M(F)$. Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be the unique \mathcal{M} -path from x_0 in X . Let $i \in [0, l-1]$ be such that $\langle x_0, \dots, x_i \rangle$ is a path with steepest descent for F and such that $\langle x_0, \dots, x_{i+1} \rangle$ is not. We have: $F(x_i) < F(\{x_i, x_{i+1}\})$. Let $Z = X \setminus \{x_i, x_{i+1}\}$. Since $\{x_i, x_{i+1}\}$ is not an edge of $M(F)$, from Lem. 38, there exists a unique connected component of Z , denoted by C , which does not contain a minimum of F . Furthermore, the vertex set of C does not contain any vertex of $M(F)$. Since π is an \mathcal{M} -path, hence a simple path, $\langle x_{i+1}, \dots, x_l \rangle$ is a path in Z and x_l is a vertex of $M(F)$. Thus, x_i is a vertex of C . From Lem. 36, we deduce that there exists $v = \{y, z\} \in E$ such that y is a vertex of C whereas z is not and $F(v) \leq F(x_i)$. Thus, $F(v) < F(\{x_i, x_{i+1}\})$. By definition, we have $V(Z) = V(X) = V$. Hence, it may be seen that $Z \cup v$ is a spanning forest relative to $M(F)$ whose weight is strictly less than the weight of X . Thus, X is not a MSF relative to $M(F)$.

(ii) Suppose that X is not a MSF relative to $M(F)$. We are going to prove

that there exists $x \in V$ such that there is no path with steepest descent in X from x to $M(F)$. By the converse of Lem. 37, there exists $u \in E(X) \setminus E(M(F))$ and $v \in E \setminus E(X)$ such that $(X \setminus u) \cup v$ is a spanning forest relative to $M(F)$ and $F(v) < F(u)$. Let $X' = X \setminus u$. By Lem. 38, there exists a unique connected component of X' , denoted by C , which does not contain any minimum of F . Since $X' \cup v$ is an extension of $M(F)$, there exists a unique vertex x in v which is a vertex of C . As $x \in v$, $F(x) \leq F(v)$. Thus, $F(v) < F(u)$ implies $F(x) < F(u)$. Let π be the unique \mathcal{M} -path in X from x to $M(F)$. Since C does not contain any minimum of F , we deduce that π passes through u but $F(x) < F(u)$. Hence, π is not a path with steepest descent for F . \square

The following lemmas will be used in the proof of Th. 10.

Lemma 39 *Let $S \subseteq E$ be a watershed of F and $Y \subseteq \bar{S}$ be a forest relative to $M(F)$. If $V(Y) \neq V$, then there exists an edge $\{x, y\}$ in \bar{S} outgoing from Y such that either $\langle x, y \rangle$ or $\langle y, x \rangle$ is a path with steepest descent for F . Furthermore, $Y \cup \{x, y\}$ is a forest relative to $M(F)$.*

Proof: Since $V(Y) \neq V$, there exists $x_0 \in V \setminus V(Y)$. Since S is a watershed, by Th. 6, there exists, from x_0 to $M(F)$, a path $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ in \bar{S} with steepest descent for F . Since $M(F) \subseteq Y$, there exists $i \in [0, l-1]$ such that $x_i \notin V(Y)$ and $x_{i+1} \in V(Y)$. Thus, $\{x_i, x_{i+1}\}$ is outgoing from Y . Furthermore, by the very definition of a path with steepest descent for F , $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ is a path with steepest descent for F .

Since $x_i \notin V(Y)$, any cycle in $Y \cup \{x_i, x_{i+1}\}$ is also a cycle in Y . Thus, thanks to Rem. 7, $Y \cup \{x_i, x_{i+1}\}$ is a forest relative to Y , hence a forest relative to $M(F)$. \square

The following lemma follows straightforwardly from the definition of a path with steepest descent.

Lemma 40 *If $\langle x_0, \dots, x_l \rangle$ and $\langle x_l, \dots, x_m \rangle$ are two paths with steepest descent for F , then $\pi = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$ is a path with steepest descent for F .*

Proof of Th. 10:

(i) If S is a cut induced by a MSF relative to $M(F)$, then, by Lem. 9, there exists a path with steepest descent in \bar{S} from each point in V to $M(F)$. Hence, by Th. 6, S is a watershed of F .

(ii) Suppose that S is a watershed of F . Let us consider a sequence of graphs X_0, \dots, X_k such that:

- $X_0 = M(F)$;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{x_i, y_i\}$ where $\{x_i, y_i\}$ is an edge of \bar{S} outgoing from X_i such that $\langle x_i, y_i \rangle$ is a path with steepest descent for F ;
- X_k is such that there is no edge $\{x_k, y_k\}$ of \bar{S} outgoing from X_k such that $\langle x_k, y_k \rangle$ is a path with steepest descent for F .

By induction on Lem. 39, X_k is a forest relative to $M(F)$. Furthermore, by

the converse of Lem. 39, $V(X_k) = V$. Thus, X_k is a spanning forest relative to $M(F)$. From Lem. 40, it can be deduced by induction that for any $x \in V$ there exists, from x to $M(F)$, a path in X_k with steepest descent for F . Hence, by Lem. 9, X_k is a MSF relative to $M(F)$. Furthermore, since S is a cut and $X_k \subseteq \bar{S}$, it may be seen that S is the cut induced by X_k . \square

A.3 Proofs of Sec. 4

Lemma 41 *Let $H \in \mathcal{F}$. If H is a border thinning of F , then any forest relative to $M(H)$ is a forest relative to $M(F)$.*

Proof: Let u be a border edge for F and let H be the lowering of F at u . We first prove the property for H . Then, Lem. 41 can be easily established by induction. If u is not an edge of $M(H)$ then $M(H) = M(F)$: the proof is done. Suppose now that u is an edge of $M(H)$. Let $u = \{x, y\}$ with $F(x) \geq F(y)$. The fact that u is border for F implies $F(u) = F(x)$ and $F(u) > F(y)$. Thus, u is not an edge of $M(F)$ and x cannot belong to an edge of $M(F)$ (otherwise we would have $F(x) < F(u)$). Therefore, x is not a vertex of $M(F)$. The edge u belongs to S , the edge set of one minimum of H . Since $H(u) = F(y)$ and $F(u) > F(y)$ (by definition of a lowering at a border edge), there is an edge $v \neq u$ which contains y such that $F(v) = H(v) = F(y) = H(u)$. Necessarily v belongs to S . Hence, $S \setminus u \neq \emptyset$ and it may be seen that $S \setminus u$ is exactly the edge set of a minimum of F . Thus y is a vertex of $M(F)$ and $M(H)$ is an extension of $M(F)$. Furthermore, since x is not a vertex of $M(F)$, any cycle in $M(H)$ is also a cycle in $M(F)$. Thus, by Rem. 7, $M(H)$ is a forest relative to $M(F)$ and any forest relative to $M(H)$ is also a forest relative to $M(F)$. \square

Lemma 42 *Let H be a border thinning of F .*

- (i) *For any vertex x of a minimum of H , there exists a path in $M(H)$ from x to $M(F)$ which is a path with steepest descent for F .*
- (ii) *Any \mathcal{M} -path (for H), with steepest descent for H is a path with steepest descent for F .*

Proof:

Let us first suppose that H is the lowering of F at a border edge u for F .

(i) Let x and y be the two vertices in u . If none of x and y is a vertex of $M(F)$, then $M(F) = M(H)$ and the proof is trivial. Suppose that y is a vertex of $M(F)$. Since u is a border edge, $F(x) = F(u)$. Thus, $\langle x, y \rangle$ is a path in $M(H)$ with steepest descent for F . Let z be any vertex of $M(H)$, $z \neq x$. Necessarily z is also a vertex of $M(F)$. Hence, $\langle z \rangle$ is a path in $M(H)$ from z to $M(F)$ with steepest descent for F .

(ii) The property is verified for any trivial path. Let us consider the case of non-trivial paths. Let $x_0 \in V \setminus V(M(H))$ and let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be an

\mathcal{M} -path (for H) with steepest descent for H . Since x_l is a vertex of $M(H)$ and $\{x_{l-1}, x_l\}$ is not an edge of $M(H)$, by the very definition of a minimum, $H(\{x_{l-1}, x_l\}) > H(x_l)$. Hence, from the definition of a lowering, we deduce that $u \neq \{x_{l-1}, x_l\}$.

Suppose that there exists $i \in [1, l-1]$ such that $u = \{x_{i-1}, x_i\}$. As π is a path with steepest descent for H , $H(x_i) = H(\{x_i, x_{i+1}\})$. By the very definition of a lowering, $\{x_{i-1}, x_i\}$ is the only edge of G whose altitude is different for F and H . Thus, $F(\{x_i, x_{i+1}\}) = H(\{x_i, x_{i+1}\}) = H(x_i)$ and, by definition, $F(x_i) \leq H(x_i)$. Since H is a lowering of F , $H(x_i) \leq F(x_i)$. Hence, $F(x_i) = H(x_i) = F(\{x_i, x_{i+1}\})$. Therefore, since $F(\{x_{i-1}, x_i\}) > H(\{x_{i-1}, x_i\})$, necessarily $F(\{x_{i-1}, x_i\}) > F(x_i)$ and since u is border for F , $F(x_{i-1}) = F(\{x_{i-1}, x_i\})$. Furthermore, for any $v \in E$, $v \neq u$, $F(v) = H(v)$. Thus, in this case, π is a path with steepest descent for F .

Suppose now that for any $i \in [1, l]$, $u \neq \{x_{i-1}, x_i\}$. By definition of a lowering $F(u) > H(u)$, hence, for any $i \in [0, l]$, $F(x_i) = H(x_i)$. Thus π is a path with steepest descent for F .

By induction on (i) and (ii) and thanks to Lem. 40, it may be seen that Lem. 42 holds for any border thinning of F . \square

Lemma 43 *The map F is a border kernel if and only if V is the vertex set of $M(F)$.*

Proof:

(i) Suppose that V is not the vertex set of $M(F)$. Then, there exists $x_0 \in V$ which is not a vertex of $M(F)$. Since (V, E) is finite, there exists an \mathcal{M} -path $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ with steepest descent for F . Thus, $F(x_{l-1}) = F(\{x_{l-1}, x_l\})$. Since π is an \mathcal{M} -path, $F(x_l) < F(\{x_{l-1}, x_l\})$. Hence, $\{x_{l-1}, x_l\}$ is a border edge for F , and F is not a border kernel.

(ii) Suppose that F is not a border kernel. There exists $u = \{x, y\}$ which is a border edge for F . Without loss of generality, assume that $F(x) = F(u)$ and $F(y) < F(u)$. There is no minimum of F whose vertex set contains x since $F(x) = F(u)$ and since there exists an edge which contains y whose altitude is strictly less than the altitude of u . Hence, V is not the vertex set of $M(F)$. \square

Proof of Prop. 13:

(i) Let X be a MSF relative to $M(H)$ for H . We will prove that for any point x_0 in V , there exists in X a path from x_0 to $M(F)$ which is a path with steepest descent for F . Thus, by Lem. 9, this will establish the first part of Prop. 13. From Lem. 9, it may be seen that there exists in X an \mathcal{M} -path (for H), denoted by $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$, which is a path with steepest descent for H . By Lem. 42.ii, π is a path with steepest descent for F . Since x_l is a vertex of $M(H)$, by Lem. 42.i, there exists in $M(H)$ a path $\pi' = \langle x_l, \dots, x_m \rangle$ from x_l to $M(F)$ which is a path with steepest descent for F . Since X is an extension of $M(H)$, $M(H) \subseteq X$. Hence, π' is a path in X . Moreover, π is by

construction a path in X . Therefore, $\pi'' = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$, is a path in X . Since both π and π' are paths in X with steepest descent for F , by Lem. 40, π'' is also a path in X with steepest descent for F , which, by construction, is a path from x_0 to $M(F)$.

(ii) Suppose that H is a border kernel of F . From Lem. 43, $V(M(H)) = V$. Then, any MSF relative to $M(H)$ is equal to $M(H)$. Hence, from (i), we prove (ii). \square

Proof of Prop. 18

Let $u = \{x, y_0\} \in E$, with x being a vertex of $M(F)$, be a flooding edge for F . By the very definition of a minimum, we have $F(u) > F(x)$. Let $\pi = \langle y_0, \dots, y_l \rangle$ be any \mathcal{M} -path with steepest descent for F . It may be seen that $F(\{y_{l-1}, y_l\}) \leq F(y_0)$. Since π is an \mathcal{M} -path, $\{y_{l-1}, y_l\}$ is outgoing from $M(F)$. By hypothesis, $F(u) \leq F(\{y_{l-1}, y_l\})$. Thus, $F(u) \leq F(y_0)$ and since $y_0 \in u$, necessarily $F(u) = F(y_0)$. Hence, u is a border edge for F . \square

The following lemma is used to prove Lem. 20. The proof is similar to the one of Lem. 43 and, thus, omitted.

Lemma 44 *The map F is an M -border (resp. flooding) kernel if and only if V is the vertex set of $M(F)$.*

Thanks to the construction presented in Sec. 3.2, the following lemma can be derived from basic results on minimum spanning trees (see, for instance, Th. 23.1, p. 563, in [29]).

Lemma 45 *Let X be a subgraph of G , let Y be a MSF relative to X , and let $Z \subseteq Y$ be a forest relative to X such that $Z \neq Y$. Let u be an edge of minimal altitude among all the edges of Y outgoing from Z . Then, the altitude of any edge of G outgoing from Z is greater than or equal to $F(u)$.*

Proof of Lem. 20:

(i) \implies (ii): Let H be a flooding kernel of F and let $X = M(H)$. By Prop. 18, H is a border thinning of F . Consequently to Lem. 44, V is the vertex set of $M(H)$ and, again by Lem. 44, H is an M -border kernel of F . (ii) \implies (iii): Let H be an M -border kernel of F and let $X = M(H)$. Trivially H is a border thinning of F . By Lem. 44, V is the vertex set of $M(H)$. Thus, by Lem. 43, H is a border kernel of F .

(iii) \implies (iv): Prop. 13.

(iv) \implies (i): Let X be a MSF relative to $M(F)$ and let us consider a sequence of graphs X_0, \dots, X_k such that:

- $X_0 = M(F)$;
- for any $i \in [1, k]$, $X_i = X_{i-1} \cup u_i$ where u_i is an edge of minimal altitude (for F) among all the edges of X outgoing from X_{i-1} ; and
- V is the vertex set of X_k .

It may be seen that such a sequence always exists. Consider also the associated

sequence of maps F_0, \dots, F_k such that $F_0 = F$ and for any $i \in [1, k]$, F_i is the lowering of F_{i-1} at u_i .

We will proceed by induction to establish, for any $i \in [1, k]$, the following proposition:

(\mathcal{P}_i) : F_i is a flooding of F such that $X_i = M(F_i)$.

Let $i \in [1, k]$ and suppose that (\mathcal{P}_{i-1}) holds. By Prop. 18 and Lem. 41, (\mathcal{P}_{i-1}) implies that X_{i-1} is a forest relative to $M(F)$. Therefore, it follows from Lem. 45, that the altitude (for F) of any edge of G outgoing from X_{i-1} is greater than or equal to $F(u_i)$. By construction of F_{i-1} , we have $F(v) = F_{i-1}(v)$ for any edge v outgoing from X_{i-1} . Thus, u_i is an edge with minimal altitude (for F_{i-1}) among all the edges outgoing from X_{i-1} . Furthermore, thanks to (\mathcal{P}_{i-1}) , $X_{i-1} = M(F_{i-1})$. Hence, u_i is a flooding edge for F_{i-1} , and it follows straightforwardly that F_i is a flooding of F_{i-1} . Moreover, by (\mathcal{P}_{i-1}) , F_i is a flooding of F . Consequently to the definition of a lowering at a flooding edge, $M(F_i) = M(F_{i-1}) \cup u_i$. Hence, $M(F_i) = X_{i-1} \cup u_i = X_i$, which completes the proof of (\mathcal{P}_i) .

Since (\mathcal{P}_0) is trivially verified, by induction, \mathcal{P}_k is established. Therefore, by Prop. 18 and Lem. 41, $M(F_k) = X_k$ is a forest relative to $M(F)$. Since $V(X_k) = V$, since $X_k \subseteq X$ (by construction) and since X is a forest relative to $M(F)$, by the definition of a spanning forest, we have necessarily $X_k = X$. By Lem. 44, F_k is a flooding kernel. Hence, by (\mathcal{P}_k) , $X = X_k$ is the min-graph of F_k , a flooding kernel of F . \square

A.4 Proofs of Sec. 6

Proof of Th. 29: Suppose that Y is a MSF relative to X . Suppose also that there exist A and B , two components of X such that $F(A, B) \neq F(A', B')$, where A' and B' are the two components of Y such that $A \subseteq A'$ and $B \subseteq B'$. Since $\Pi(A, B) \subseteq \Pi(A', B')$, $F(A, B) > F(A', B')$. Let $\pi = \langle x_k, \dots, x_l \rangle$ be a path from A' to B' such that $F(\pi) = F(A', B')$ and such that x_k (resp. x_l) is the only vertex of A' (resp. B') in π . Notice that $\{x_k, x_{k+1}\}$ and $\{x_{l-1}, x_l\}$ are not edges of Y . Let $\pi_A = \langle x_0, \dots, x_k \rangle$ (resp. $\pi_B = \langle x_l, \dots, x_m \rangle$) be a simple path in A' (resp. B'), such that x_0 (resp. x_m) is the only point of π_A (resp. π_B) which is a point of A (resp. B). Since $\pi' = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$ is a path from A to B , $F(\pi') \geq F(A, B)$. Thus, since $F(\pi) < F(A, B)$, we have either $F(\pi_A) \geq F(A, B)$ or $F(\pi_B) \geq F(A, B)$. Without loss of generality, assume that $F(\pi_A) \geq F(A, B)$. Let u be any edge of π_A such that $F(u) = F(\pi_A)$. Since $F(\pi) < F(\pi_A)$, $F(u) > F(\{x_k, x_{k+1}\})$. Since π_A is a simple path in A' , since x_0 is the only point of π_A which is in A , and since $\{x_k, x_{k+1}\}$ is not in Y , it may be seen that $(Y \setminus u) \cup \{x_k, x_{k+1}\}$ is a spanning forest relative to X . Since $F(u) > F(\{x_k, x_{k+1}\})$, $(Y \setminus u) \cup \{x_k, x_{k+1}\}$ has a cost strictly less than Y . Thus, Y is not a MSF relative to X , a contradiction. \square

Proof of Prop. 30: Suppose that Y is a MSF relative to X which is not a shortest-path spanning forest relative to X . There exists $x_0 \in V(Y)$ such that for any path π in Y from x_0 to X , we have $F(\pi) > F(x_0, X)$. Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be any such path and suppose, without loss of generality, that π is a simple path. Let $i \in [0, l-1]$ be such that $F(\{x_i, x_{i+1}\}) = F(\pi)$ and let $u = \{x_i, x_{i+1}\}$. We denote by C the connected component of $Y \setminus u$ such that $x_0 \in V(C)$. Since π is a simple path, from Lem. 38, we deduce that C is the unique connected component of $Y \setminus u$ which does not contain a connected component of X . Let $\pi' = \{y_0 = x_0, \dots, y_m\}$ be a path in G from x_0 to X such that $F(\pi') = F(x_0, X)$. Let $j \in [0, m-1]$ be such that $y_j \in V(C)$ whereas $y_{j+1} \notin V(C)$. Let $v = \{y_j, y_{j+1}\}$. Thus, $(Y \setminus u) \cup v$ is a spanning forest relative to X . Necessarily, $F(v) \leq F(\pi')$. Hence, since $F(\pi') = F(x_0, X)$ and $F(\pi) > F(x_0, X)$, $F(v) < F(\pi)$ and $F(v) < F(\{x_i, x_{i+1}\})$. Thus, from the two previous observations, we deduce that Y is not a MSF relative to X , a contradiction. \square

Since G is a finite graph, for any $x \in V$ there exists a path π with steepest descent for F from x to $M(F)$. Then, it may be seen that $F(\pi) = F(x) = F(x, M(F))$.

Proof of Prop. 31:

(i) Suppose that X is a spanning forest relative to $M(F)$ which is not a MSF relative to $M(F)$. From Lem. 9, there exists a vertex $x \in V$ such that none of the paths in X from x to $M(F)$ is with steepest descent for F . Let P be the set of all points that can be reached from x by a path in X with steepest descent for F . Let y_0 be the vertex of P with minimal altitude. By hypothesis, y_0 is not a vertex of $M(F)$. Let $\pi = \langle y_0, \dots, y_l \rangle$ be the unique \mathcal{M} -path in X , from y_0 to $M(F)$. Let $i \in [0, l-1]$ be the lowest index such that $y_i \in P$ and $y_{i+1} \in V \setminus P$. If $F(\{y_i, y_{i+1}\}) = F(y_i)$, then there exists $j \in [0, i-1]$ such that $F(y_j) < F(\{y_j, y_{j+1}\})$ (otherwise y_{i+1} would belong to P) and thus, $F(\{y_j, y_{j+1}\}) > F(y_0)$ (since $F(y_j) \geq F(y_0)$ by definition of y_0, i and j). If $F(\{y_i, y_{i+1}\}) > F(y_i)$, then $F(y_0) < F(\{y_i, y_{i+1}\})$ since $F(y_0) \leq F(y_i)$. In both cases, $F(\pi) > F(y_0)$. From the remark stated above this proof, we have $F(\pi) > F(y_0, M(F))$, hence, X is not a shortest path forest relative to $M(F)$.
(ii) a direct consequence of Prop. 30. \square

Proof of Prop. 35: Let $u = \{x, y\} \in E$ be a border edge for F such that $F(u) = F(x) = k$. We will prove that the lowering of F at u is a W-thinning of F , hence, by induction, this will establish Prop. 35. From the definition of a border edge, $F(y) < k$. Thus, there exists a set of edges $S \subseteq E$, such that $S = \{v_i = \{y, y_i\} \in E \mid y_i \neq x \text{ and } F(v_i) < k\}$. Since any element in S contains y , all the edges in S are in the same component of $\overline{F}[k]$. Since $F(x) = k$, none of the edges $v_j = \{x, z_j\} \in E$ with $z_j \neq y$, is in $\overline{F}[k]$. Thus, u is adjacent to exactly one component of $\overline{F}[k]$. Hence, u is W-destructible for F and the map obtained by lowering the value of u by one is

a W-thinning of F . By iterating the same arguments, it may be seen that u can be lowered down to $F(y)$. In other words, the lowering of F at u is a W-thinning of F . \square

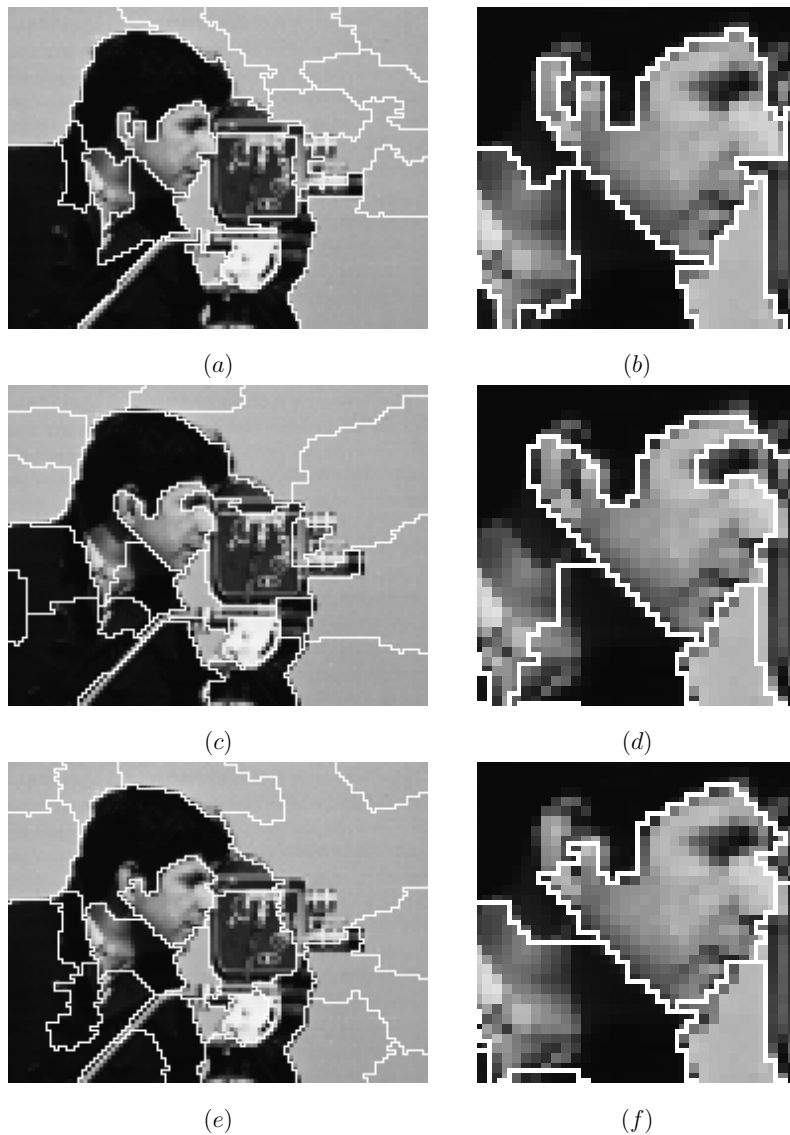


Fig. 9. Results obtained by applying a grayscale watershed on a filtered map. (a, b) A watershed cut ($k = 22$) superimposed in white to the original image I ; (c, d) a watershed by flooding of the filtered ($k = 22$) Deriche optimal edge detector; and (e, f) a watershed by flooding of a filtered ($k = 22$) morphological gradient. In each image, the image resolution is doubled in order to superimpose the resulting contours.

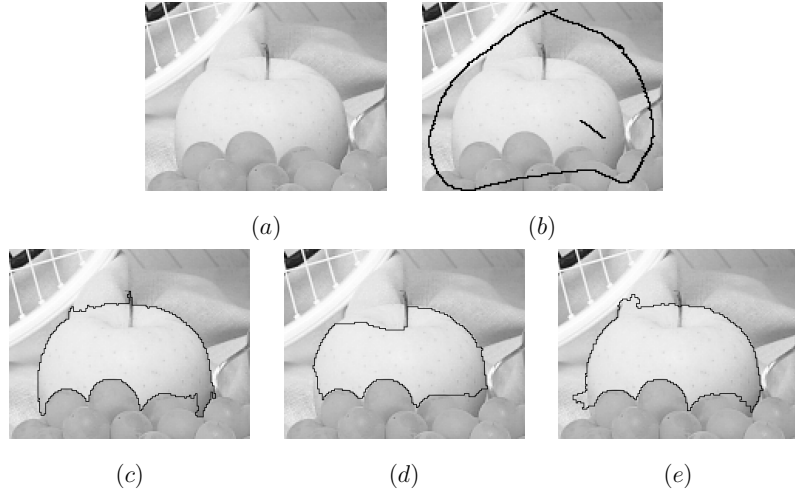


Fig. 10. Comparison of different watersheds from markers. (a) Original image; (b) the markers are superimposed in black. In the second row the resulting watersheds are superimposed in black to the original image. (c): Relative MSF; (d): watershed by flooding of the Deriche optimal edge detector; (e): watershed by flooding of a morphological gradient of the image.

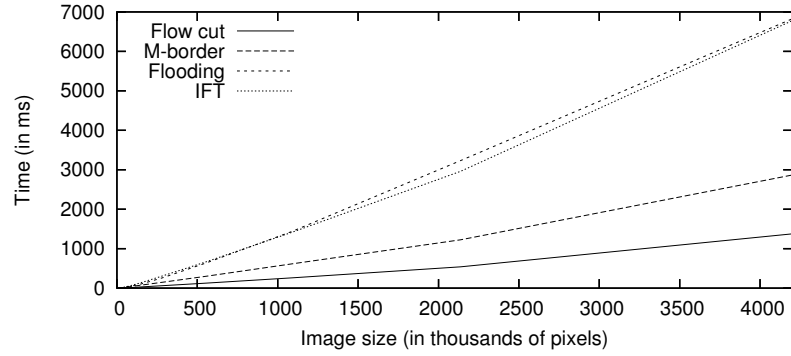


Fig. 11. Computation times of four different watershed algorithms: watershed by flooding (without dividing line) [4], watershed by Image Foresting Transform [13] and the two algorithms (M-border Kernel and flow cut) proposed in this paper

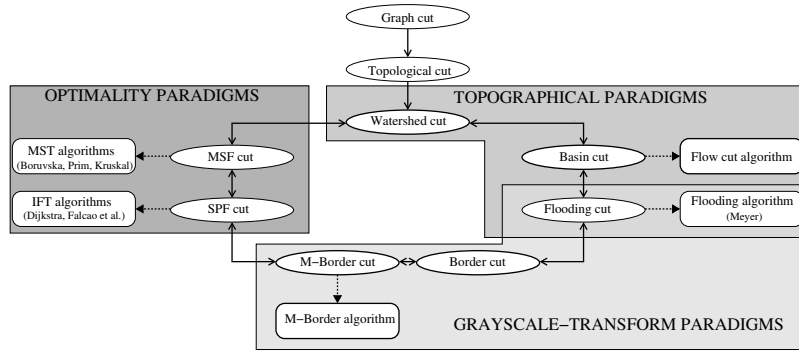


Fig. 12. Summary of the properties on cuts for the regional minima of a map. In the figure, $N \leftarrow N'$ means that the notion N is a particular case of the notion N' , hence, $N \leftrightarrow N'$ means that the notions N and N' are equivalent; $A \dashleftarrow N$ means that the notion N can be computed thanks to algorithm A . The new notions and algorithms introduced in this paper are highlighted in bold.

Annexe D

Automated, accurate and fast segmentation of 4D cardiac cine-MR images

J. Cousty, L. Najman, M. Couprie, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen, J. Garot.
Soumis pour publication en revue.

Automated, accurate and fast segmentation of 4D cardiac cine-MR images based on discrete mathematical morphology

J. Cousty, L. Najman, M. Couprie,

*Institut Gaspard-Monge,
Laboratoire A2SI, Groupe ESIEE
Cité Descartes, BP99, 93162 Noisy-le-Grand Cedex France*

S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen and J. Garot

*Fédération de Cardiologie and Unité INSERM 660, Faculté de Médecine de
Créteil and Mondor University Hospital, Assistance-Publique-Hôpitaux de Paris,
Créteil, France.*

Abstract

Based on discrete mathematical morphology, we propose a new automated and fast procedure to segment the left ventricular myocardium in 4D (3D+t) cine-MRI sequences. Both quantitative and qualitative evaluation are provided. Thanks to the comparison with manual segmentation performed by two cardiologists, we demonstrate the accuracy of the proposed method. The relevance of the ejection fraction and myocardium mass measured from segmentations is also assessed. Furthermore, we show that the proposed 4D procedure allows to keep the temporal coherency between the successive 3D segmentations obtained along the time sequence.

Key words: cardiac imagery, 4D-cine-MRI, 4D topological watershed, discrete mathematical morphology.

1 Introduction

In cardiology, obtaining precise information on the size and function of the left ventricle (LV) is essential both in clinical applications –diagnosis, prognostic, therapeutic decisions– or in the research fields.

Email addresses: j.cousty@esiee.fr (J. Cousty), l.najman@esiee.fr (L. Najman), m.couprie@esiee.fr (M. Couprie).

Preprint submitted to Elsevier

17 September 2007

Thanks to 3D images acquired at different times of the heart cycle, Magnetic Resonance (MR) imagery permits a complete morphological LV characterization. The precision on the measures extracted from MR images has been demonstrated to be excellent [1] and MR imagery is a “gold standard” for LV analysis as a result.

However, due to the considerable amount of data, the analysis and, in particular, the segmentation of such images is fastidious, time consuming and error-prone for human operators. Automated segmentation of cardiac images has been shown to be a challenging task.

1.1 Objectives

In the past, numerous papers have shown that model based approaches constitute successful tools for cardiac segmentation. The first objective of this paper is to show that mathematical morphology offers interesting alternatives to these approaches in the important and difficult task of designing cardiac segmentation methods that can be used in clinical routine.

The watershed transform is at the heart of many segmentation schemes in mathematical morphology. The second objective in this paper is to introduce the notion of watershed in 4-dimensional spaces (3D+time) and to show its usefulness to obtain inter-slices as well as temporal consistent segmentations.

The third objective of this paper is to constitute a database of cine MR-images (3D+t) of the LV, freely available on the internet for research purposes (see also [2]). This database contains cine-MR images of the LV, together with two hand-made segmentations and one 4D automated segmentation obtained by the proposed method.

1.2 Previous works

Since the 90's, many approaches to cardiac segmentations have been proposed, notably in the framework of deformable models [3–5]. From a time series of 3D images of the LV, most existing methods iteratively segments each 3D image. In [6], the authors integrate prior information into their deformable models. Thanks to the addition of several forces, inter- and intra-subject shape variation and spatial relationships between epi- and endocardium are taken into account. In [7], a statistical shape model of the heart, which includes point distribution model, landmark probability distributions and probabilistic atlas, is built to segment the atria and ventricles. In [8], a 3D active shape model is built in order to segment the left ventricle from arbitrary oriented

cardiac MRI. Despite a constant improvement in the accuracy of the produced segmentations, the temporal consistency of the resulting segmentations –a desired feature in the case of a time series of 3D images– is not taken into account by these approaches. On the other hand, several methods have been proposed to obtain time consistent segmentations in the case of 2D+t images (*e.g.*, [9, 10]).

Only a few methods consider the time series as a whole 4D image (see [11, 12], for instance). In [13], Lorenzo-Valdès *et al.* propose a method based on a 4D statistical atlas. A 4D atlas, which is made of a mean image coupled to a set of masks corresponding to the different objects of interest, is computed from a set of training images. Then, the segmentation is performed by the two following steps. First, the atlas is registered to the 4D image to be segmented and the associated masks produce a first classification. Then, thanks to statistics computed in each region, the classification is iteratively updated. Although it uses a 4-dimensional atlas, the classifier assigns independently each pixel to one of the objects and does not take into account global properties (*e.g.* connectedness, presence of holes, etc ...) relative to the temporal consistency of the produced segmentations. In [14], Montagnat and Delingette propose a 4D deformable model with temporal constraints. To take into account the time continuity in the image sequence, an additional force is considered to enforce the temporal coherence of the deformation along the time sequence. Despite promising results on synthetic SPECT images, the resulting segmentation scheme was not fully assessed on real cardiac images.

1.3 Proposed method

In terms of methodology, the proposed segmentation scheme is different from most of the available approaches. Any segmentation method does two jobs at a time: recognizing the objects of interest and delineating their contours. Whereas model based methods do, in general, these two tasks at the same time by minimizing an energy that describes internal forces (recognition) and external forces (delineation), the classical scheme in mathematical morphology (MM) separates these two tasks. More precisely, segmentation schemes in MM [15] comprise, in general, three main steps: recognition, delineation and smoothing. Recognition is the process of determining roughly the whereabouts of the objects. Delineation consists in the precise spatial localization of the objects borders and smoothing can be defined as the process of matching the smoothness properties of the segmented object with the a priori smoothness properties of the ground truth.

Most of the operators in MM (see a survey in [16], a detailed study of their algebraic properties in [17] and of their optimality principle in [18]) consists of

analyzing (unknown) geometrical objects (or more generally grayscale images) through their interaction with predefined shapes, called structuring elements, whose geometric properties are known in advance. These operators can, in particular, be used to select sets of pixels based on their shape, contrast or topological properties. They are well adapted to the recognition task and can be used to extract, sets of points, called markers, that roughly correspond to the objects of interest. The chosen sequence of operators used for recognition constitutes the intelligent part in the morphological segmentation. It must be adapted to each particular application by taking into account few prior properties on the objects that are to be segmented. On the other hand, the delineation is, in general, devoted to the watershed transform [19–22], an automatic operator that looks, in the image adjacency graph, for the “best” contours between the recognized markers. Finally, the smoothing task can also be performed by operators from MM.

Based on this segmentation framework, we provide, in this paper, a new automated method to segment the left ventricular myocardium in 4D (3D+t) cine-MR images. In order to recognize the different object of interests, we use notably *Exact Euclidean distance transforms* [23–26] to take into account prior geometric properties and *Homotopic transforms* [27–29] to guarantee topological soundness of the segmentations. These two operators – whose mathematical and algorithmic backgrounds were, and are still, the subject of many theoretical studies – are widely accepted as powerful, robust and time efficient tools in image analysis. They have been successfully applied in many applications (see, for instance, [30, 31]). Moreover, to take into account the time continuity of the successive 3D objects, we use, for the delineation, a watershed transform that can be applied directly on the 4D sequence considered as a whole. To this end, we consider the *watershed cuts*, a recent framework [32, 33] that produces optimal watersheds and that permits to easily introduce, in the watershed transform, the temporal component of a 3D+t image gradient.

To validate the proposed method, we propose a database of 18 patients freely available on the internet. For each patient, it contains cine-MR images of the LV, together with three associated segmentations: two hand-made segmentations – each one of them performed by an independent and blinded expert cardiologist – and one 4D automated segmentation obtained by the proposed method. We also provide scripts and programs that compute each of the quantitative measures described in the paper, and the software package used to obtain the automated segmentation. The web-address of this database is <http://laurentnajman.org/heart>.

Thanks to experiments performed on this validation database, we show:

- the accuracy of the automated method compared to manual segmentations performed by two cardiologists;

- the ability of the method to compute reliable characteristics of the LV (ejection fraction and left ventricular mass);
- the temporal continuity of the resulting automated segmentation;
- the time-efficiency (about 3' to segment a sequence of 25 3D-images on a low-end computer) of the proposed method; and
- the robustness of the few parameters whose setting rely mostly on physical and anatomical facts.

The outline of the paper is the following: Section 2 presents the prior properties of the left ventricle in MR images. In Section 3, the proposed automated segmentation method is described. Then, in Section 4, the validation database is detailed. Finally, in Section 5, the experimental results are described and discussed.

This paper extends a preliminary version published in a conference [34].

2 Prior properties of the left ventricle

In this first section, we describe the objects of interest that are to be segmented. While doing this, we introduce a minimal set of prior knowledge that will allows us to specify the sequence of operators that constitute the segmentation method.

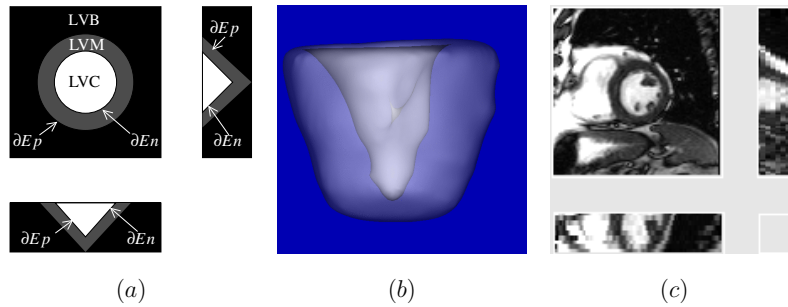


Fig. 1. (a), Schematic view of three orthogonal sections of the objects of interest in LV images; (b), a three dimensional rendering of these objects of interest; and (c), three orthogonal section of a 3D MR images of the left ventricle.

2.1 Topology

Since it is the subject of the most frequent and serious pathologies, such as left ventricular infarcts, the left ventricular myocardium (*LVM*) focuses

cardiologist' attention. It is delimited by two surfaces, the endocardial border (∂En) and the epicardial border (∂Ep). Each of these two surfaces partition the three dimensional space into two connected objects of interest. We thus consider (see Fig. 1): (i) the left ventricular cavity (LVC) whose border is ∂En and its complementary set \overline{LVC} ; and (ii), the union of the LVC and the LVM , denoted by $LVC M$ whose border is ∂Ep and its complementary set called left ventricular background ($LVB = \overline{LVC M}$).

2.2 Geometry

Both endo- and epicardial borders can be roughly model by conic surfaces. The endocardial border is irregular. It delineates trabeculae, papillary muscles, and a tendineae network that permit the opening and closing of cardiac valves. The epicardial border is, on the contrary, smooth and regular. These two borders are linked by geometrical relationships. The myocardial thickness – more precisely, the distance from each point of ∂En to the surface ∂Ep – cannot be predicted. It can change from one patient to another. Furthermore, for a given patient, it is not necessarily constant everywhere around the chamber. For instance, myocardial thickness differs between sane and pathological parts of the muscle. Nevertheless, from anatomical observations, the myocardial thickness can be bounded and since we only consider live patients, it cannot be null.

2.3 Brightness

The LVM is observed through MR images. In these images, each object of interest can be recognized through its brightness (see Fig. 1c). The LVC is a very bright object, its gray level is high. The gray level of the LVM, which surrounds the LVC, is significantly darker than the one of the LVC: ∂En , the border that separates these two objects, is thus well contrasted. The LVB is made of several tissues. Some of them can be characterized by their brightness. For instance, the right ventricular chamber or the myocardial fat are very bright whereas the lungs are very dark. On the other hand, the brightness of some other tissues included in the LVB is comparable to the one of the LVM. Therefore, the contrast along ∂Ep , the border that separates these two objects, can be very low and is even null at some places.

3 Automated segmentation method

Following the three steps segmentation scheme presented in the introduction and including the knowledge of the left ventricle discussed in Section 2, we describe the morphological method to automatically segment the LVM in 3D+t cardiac images. It is composed of two consecutive steps that consist of LVC segmentation, followed by $LVC M$ segmentation. Once LVC and $LVC M$ are segmented in the whole 3D sequence, LVM is simply the set difference between them (*i.e.*, $LVM = LVC M \setminus LVC$). Since endo- and epicardial borders differ both in terms of contrast and shape, we choose to segment them by different sequences of operators.

The LVC is segmented thanks to *geodesic dilations* [16] : a morphological region growing technique based on geometrical constraint.

- The recognition process consists of extracting a connected set of points, which belongs to the LVC with certainty.
- Then, delineation is performed by dilating this marker in a mask made of points that possibly belongs to the LVC .
- Following the geometric properties of ∂En , we do not apply any smoothing on the object obtained after delineation.

The segmentation of the $LVC M$, is performed by the following three steps.

- The recognition step consists of finding markers of both $LVC M$ and LVB that respect the topological, geometric, and brightness related properties of the heart.
- Then, delineation is performed by a 4D watershed algorithm that precisely localizes ∂Ep in contrasted area and allows to maintain temporal coherency between the successive segmentations over time.
- It is followed by a smoothing step (alternating sequential filter), that regularizes ∂Ep and restore a correct shape where intensity information was missing.

3.1 Basic notions and notations

Many operations in MM can be rigorously described in the framework of graph. We thus introduce a minimal set of definitions to handle this framework.

In the application we are dealing with in this paper, we consider 4D images. We assume that w, h, d , and l are four strictly positive integers that represent respectively the width, height, depth of the 3D volumes, and the number of 3D volumes in the sequence. The *4D image domain* is the set: $V = \{x \in \mathbb{Z}^4 \mid 0 < x_1 \leq w, 0 < x_2 \leq h, 0 < x_3 \leq d, 0 < x_4 \leq l\}$, x_i being the i -th coordinate of x . A *4D image* is a map from V to \mathbb{N} , the set of positive integers. In the following, we denote by I a 4D image.

In order to recover a graph structure over a 4D sequence I , we consider the binary relation E on V such that for all x, y in V , $(x, y) \in E$ if and only if $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| + |x_4 - y_4| \leq 1$. We also say that the points x and y are *adjacent for E* . The pair $G = (V, E)$ is a *graph*. In other words, (V, E) is the graph in which each voxel is adjacent to its 6 neighbors in 3D and to the voxels just “before” and “after” in the 4D sequence.

Some of the tools considered in this application directly act on this 4D graph but some others act on 3D or 2D restrictions of G corresponding to 3D and 2D images. Let $t \in [1, l]$. The graph G_t is the subgraph of G induced by the set of all voxels of the t -th volume of the sequence, i.e., $G_t = (V_t, E_t)$; $V_t = \{x \in V \mid x_4 = t\}$; $E_t = E \cap V_t \times V_t$. We note that G_t is the graph induced by the classical 6-adjacency relation on \mathbb{Z}^3 (see [35]). Let $z \in [1, d]$. The graph $G_{t,z}$ is the subgraph of G_t induced by the set of all pixels in the z -th slice of the t -th volume of the sequence. We note that $G_{t,z}$ is the graph induced by the classical 4-adjacency relation on \mathbb{Z}^2 (see [35]). We denote by I_t and $I_{t,z}$ the 3D and 2D restrictions of I to respectively V_t and $V_{t,z}$.

We call *4D (resp. 3D, 2D) neighborhood* of a set of points $X \subseteq V$, denoted by $N(X)$ (resp. $N_t(X)$, $N_{t,z}$), the set of all points in V which are adjacent for E (resp. E_t , $E_{t,z}$) to a point of X .

Throughout this paper, the intersection of a set X with the vertices of G_t (resp. $G_{t,z}$), one of the 3D graphs (resp. 2D graphs) is denoted by X_t (resp. $X_{t,z}$).

3.2 Endocardial border segmentation

The segmentation of ∂En is performed independently on each volume of the sequence. The idea is, first, to find a marker for the *LVC* (i.e., a subset of the *LVC* made of points which belong to the *LVC* with certainty). Then, this marker is dilated conditionally to a second set of points detected as potential candidate for belonging to the *LVC*.

By observing Fig. 1c, we remark that the *LVC* is made of two subsets: a very light core object is located at the center; and a surrounding “ring” of lower intensity located at its exterior. The core object, denoted by C_t , can be roughly segmented (recognized), separately in each volume, by selecting, in each (V_t, E_t) , the appropriate *connected component* of an upper-threshold $I_t[s_1]$ of I_t at level s_1 , i.e., $I_t[s_1] = \{x \in V_t \mid I_t(x) \geq s_1\}$.

The setting of s_1 , as well as other parameters which are further introduced, is addressed in Section 4.3.

In our experiments, the images are cropped such that, in each 3D volume,

the center belongs to the core of LVC_t . To this aim, the user selects a single point roughly located at the center of the LVC in one of the 3D images of the sequence. Then, in each 3D image, a box whose center is the specified point is automatically cropped. This step, which is the only user interaction of the whole method, could be automated but the physicians who made the evaluation prefer to keep this control point.

Thus, in each graph (V_t, E_t) , C_t is the connected component of $I_t[s_1]$ which contains the center of the volume.

This core object is surrounded by a “ring” of lower intensity, still higher than the intensity of the LVM , which is a partial volume effect due the presence of both blood and muscle within the space of a single voxel. In order to get this ring segmented and also to extract the points of the core object possibly missed by the first threshold, we perform a second upper threshold $I_t[s_2]$ of I_t at level $s_2 < s_1$. The set $I_t[s_2]$ and C_t are combined together thanks to a *geodesic dilation of size r_1 of C_t in $I_t[s_2]$* (see [16], chapter 6.1). In other words, LVC_t is the set of all points *linked* to C_t by a *path in $I_t[s_2]$* of *length* less than r_1 , where $r_1 \in \mathbb{N}$.

The robustness of the proposed procedure with respect to variations of s_1 and s_2 is estimated in Section 5.3.

3.3 Epicardial border segmentation

In this section, we describe LVC segmentation. It is performed after the LVC segmentation and therefore must preserve some anatomical constraints. We recall that, since we only consider live patients, the left ventricular myocardium does not have any hole. This leads to the constraint $\partial Ep \cap \partial En = \emptyset$. In the adopted graph framework, it comes that, in each graph G_t , the spatial neighborhood of LVC_t , should be included in LVC :

$$N_t(LVC_t) \subseteq LVC_t \quad (1)$$

In other words, we have to guarantee that LVC is at least one pixel thick everywhere.

The LVC segmentation follows the classical 3 steps scheme and respects the prior LV knowledge described in Section 2. By means of carefully selected markers (Section 3.3.1 and Section 3.3.2) and a 4D watershed algorithm (Section 3.3.3), we get a first segmentation of LVC . This first segmentation is smoothed by alternating sequential filters (Section 3.3.4) to obtain the definitive segmentation of LVC .

3.3.1 Recognition of the LVC M

We first tackle the problem of computing, for any given t , $mLVC M_t$ the marker of $LVC M$ in I_t . The watershed transform extends the markers as much as possible. Thus, by definition, each marker taken as an input of the watershed transform is included in the corresponding object obtained after the watershed. Therefore, in order to fulfill constraint (1), we need to impose $N_t(LVC_t) \subseteq mLVC M_t$.

In order to compute this marker, the basic idea is to dilate the already known left ventricular chamber as much as possible while ensuring that the marker lies in the “true” $LVC M_t$. Since myocardial thickness is not constant in infarcted ventricles, it is not reasonable to use the same dilation parameter everywhere around the chamber and for every different dataset. Thus, the dilations must be constrained in order to fit each particular anatomy. To this end, we introduce an original definition of a *repulsed dilation* (see Appendix) for which an auxiliary set serves to repulse the dilation.

In our practical application, the goal is to find a repulsive set that capture some of the features particular to the shape of the heart under consideration. Therefore, this set is extracted from the images. We have remarked that some bright and dark regions (corresponding, for instance, to the right ventricle, the vascular network or the lungs) surrounds the $LVC M$. These regions can be classified as non-myocardium objects and, thus, used to repulse the dilation. Some robust markers of these zones can be simply extracted by upper and lower threshold of the image:

$$\mathcal{T}_t = \{x \in V_t \setminus N_t(LVC_t) \mid I_t(x) < s_3 \text{ or } I_t(x) > s_4\} \quad (2)$$

where $s_3 \in \mathbb{N}$ and $s_4 \in \mathbb{N}$. Then, $mLVC M_t$ is defined as the dilation of size r_2 of $N_t(LVC_t)$ repulsed by \mathcal{T}_t .

We emphasize that the repulsed dilation is designed to take into account that we deal with markers of an object rather than its precise segmentation. Thus, the set \mathcal{T}_t does not need to be a precise segmentation; it is used as a landmark for the right ventricle, the vascular network, etc. . .

We furthermore note that, by construction, we guarantee $N_t(LVC_t) \subseteq mLVC M_t$. Thus, since watershed can only extend the markers, constraint (1) will be preserved in the result of the forthcoming watershed procedure.

3.3.2 Recognition of the LVB

In order to compute, for any given t , $mLVB_t$, the marker of LVB in I_t , we consider the two following prior properties:

(a) the thickness of a left ventricular myocardium cannot exceed a given threshold, denoted by r_3 ;

(b) the set \mathcal{T}_t (equation 2) is made of points that are necessarily in the background of the left ventricular chamber and myocardium.

From property (a), the points farther from LVC_t than a distance of r_3 have to belong to $LV B_t$. This set is denoted by $LV B_t^{r_3}$. Following property (b), we also want \mathcal{T}_t to be included in $mLV B_t$. In order to satisfy these two requirements, the easiest way is to consider $mLV B_t$ as the union of $LV B_t^{r_3}$ and \mathcal{T}_t . Unfortunately this set is not necessarily connected. Using it as a watershed marker can induce some topological configurations of the set $wLVCM_t$, obtained after the watershed process, that are in contradiction with the topological prior properties stated in Section 2. More precisely, $wLVCM_t$ could have some cavities. A didactic example of such an unwanted configuration is depicted on Fig. 2ab in 2D.

In order to overcome this problem, *homotopic transforms* constitute powerful tools. They consist of deriving an object from another one while preserving topology. Furthermore, geometrical constraints can also be added to the transform by imposing the inclusion of an auxiliary set in the resulting object. The left ventricular background has a unique cavity made of the left ventricular chamber and myocardium. The set $LVC M_t$ is, by construction connected and must be surrounded by $LV B_t$. The complementary set of $mLVCM_t$ thus contains a unique cavity, and obviously surrounds $mLVCM_t$. Therefore, $mLV B_t$ can be derived starting from the complementary set of $mLVCM_t$. The idea is then to reduce this set while both preserving its topology and respecting facts (a) and (b).

To reach this goal, we use a *constrained ultimate homotopic skeleton* [28]. Roughly speaking, an ultimate homotopic skeleton of a set X constrained by a set C , has the same topology as X , contains C , and cannot be reduced (by point removal) while keeping these two invariants. Thus, we compute $mLV B_t$, the marker of the left ventricular background, as the skeleton of $\overline{mLVCM_t}$ (i.e., the *complementary set* of $mLVCM_t$) constrained by $\mathcal{T}_t \cup LV B_t^{r_3}$. We finally obtain a set $mLV B_t$ that has the desired topology and that respects facts (a) and (b). The effect of such process is illustrated on Fig. 2cd: the problem previously pointed out does not occur anymore.

3.3.3 Delineation

The watershed transformation is used as a fundamental step in many powerful segmentation procedures. It is a graph-based method that finds a “thin” separation between the components of a given set of points called marker. In our application, we use an original approach to compute the watershed of an edge-weighted graph. Our algorithm [32, 33] derives from the topological

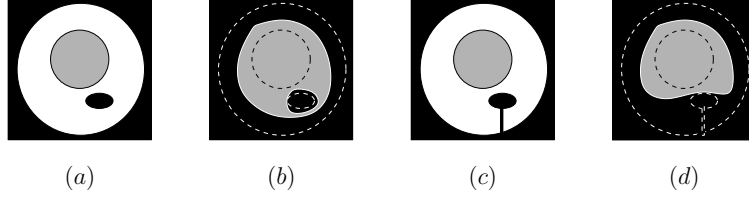


Fig. 2. Illustration of the marker connectivity impact on the resulting watershed [see text]. In (a) and (c), (resp. (b) and (d)) $mLVC$ M and $mLVB$ (resp. $wLVC$ M and $wLVB$) are in gray and black.

watershed paradigm settled in [20–22, 36, 37]. It produces a graph cut that is optimally localized in a sense equivalent to the minimum spanning trees (see Appendix ??, for precise definitions and properties).

In order to consider the 3D+t sequence as a whole, we apply the watershed transform on the 4D graph (V, E) coupled to a 4D cost function ∇ . The function ∇ assigns a weight to all edges of the graph. The weight of an edge represent the degree of dissimilarity of the voxels linked by this edge. We set $\nabla: E \rightarrow \mathbb{N}$, $(x, y) \rightarrow \nabla(x, y) = |I(x) - I(y)|$. The values of ∇ are high near the important transitions of I . The watershed is computed from the two markers made by the union of all $mLVC$ M_{*t*} and $mLVB$ _{*t*}. It returns a separation (a graph-cut) of these markers which is optimally located on the highest edges of the graph. We thus obtain a first segmentation of LVC M, denoted by $wLVC$ M, which is surrounded by a background object $wLVB$.

Contrarily to classical applications in which spatial-only watershed are considered, in this paper we take into account both spatial and temporal information in the delineation process. Therefore, temporal consistency of the resulting segmentations is unforced compared to procedures in which watersheds are computed independently in each 3D image. Let us give an intuitive idea, on the simple example depicted in Fig. 3 of how temporal consistency is enforced by this process. Consider the voxel x , whose value is 9 at time t_i . Bold lines in the figure connect x to its 8 neighbors and the associated values correspond to the map ∇ . It is easy to prove that point x will necessarily belong to the same object (after applying a watershed cut) as its weakly connected neighbor x_{weak} . In Fig. 3, x_{weak} corresponds to the voxel located at the same spatial coordinates as x , but at time t_{i-1} . Therefore, at the spatial coordinate of x , the resulting segmentation will be consistent between time t_{i-1} and t_i . On the other hand, if only 3D watersheds were used (one per 3D graph), such a consistency property would not be guaranteed. A quantitative study of the gain due to the use of 4D watershed is provided in Section 5.2.

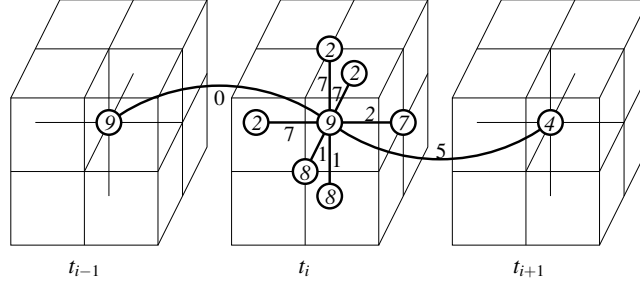


Fig. 3. Illustration of a 4D neighborhood together with the values of an image I and the associated cost function ∇ .

3.3.4 Smoothing

In order to obtain the final segmentation of $LVC M$, we use shape filters coming from mathematical morphology. An *alternating sequential filter* (ASF) is a sequence of intermixed *openings* and *closings* by balls of increasing size (see [16], chapter 8.3). An opening of a set X by a ball of radius r is the union of all balls of radius r which are included in X . On the other hand, the closing of X is the complementary of the opening of \bar{X} . Thus, an ASF smoothes the object and its complementary in a balanced way while preserving the “most significant balls” of both object and background.

The endocardial border can be roughly modeled as the surface of a cone. Thus, an ASF by balls is not adapted. One may wonder whether it is possible to use ASF by cones. Unfortunately, such filters would be tricky to design. However, following the conic model, we can use the fact that each section (perpendicular to the height axis) of a cone is a disc. Then, it becomes reasonable to consider 2-dimensional ASF by discs.

Hence, we define the $LVC M$ by all its 2D sections obtained, in each $(V_{t,z}, E_{t,z})$, by:

$$LVC M_{t,z} = ASF_{r_4}^{r_5}(wLVC M_{t,z}) \cup N_{t,z}(LVC_{t,z}) \quad (3)$$

where r_4 (rep. r_5) specifies the smallest (resp. largest) radius of the discs used in the ASF sequences.

4 Experimental setup

The data –images, manual and automated segmentations– considered to validate the automated method are presented in this section.

4.1 Images

Screened population patients referred to our Institutions for recent acute myocardial infarction (AMI) were prospectively screened regardless of the treatment received at the acute phase. To be included, patients had to exhibit symptoms of AMI – i.e., chest pain, ST segment elevation of more than 1 mm in at least 2 contiguous leads of the ECG, and greater than double the normal elevation of creatine-kinase MB subfraction. In addition, the diagnosis of AMI was required to be confirmed by invasive coronary angiography with a clearly documented culprit epicardial coronary artery. If no contraindication to CMR was found, patients were scheduled to have CMR examination between day 2 and day 4 after AMI.

In fine, 18 out of 25 patients from routine clinical practice were screened according to these guidelines. These patients had experienced a first AMI and had agreed to undergo subsequent CMR examination.

The patients were examined on a 1,5 T MR scanner (Magnetom Symphony[®], Siemens, Erlangen, Germany) using 6-channel anterior and posterior phased array surface coil technology. Following a 3D fast gradient-echo localizer sequence, the long axis of the heart was located and dynamic cine-MR images of the heart were acquired in 2-chamber, 4-chamber, and 3-chamber views. From these, the short axis of the heart was located perpendicularly to the long axis of the LV. Contiguous short-axis slices of the LV were acquired from base to the apex encompassing the entire LV, through the use of repeated breath-held ECG-gated steady-state free precession sequence (SSFP) with typical imaging parameters as follow: 300-360 mm field of view, 2.1 ms TR, 1.6 ms TE, 60A° flip angle, 6 mm slice thickness, no gap, image matrix 256x160, 30-40 ms temporal resolution.

The MR scanner was upgraded in the middle of the acquisition period, leading to two groups (of 9) patients. The intensity of a same tissue in images of two patients belonging to different groups can differ notably. Therefore, these two groups of patients can be considered as acquired by two distinct devices.

The number of LV short-axis locations required to cover the entire LV by cine-CMR ranged from 9 to 14. The number of frames acquired during the entire cardiac cycle ranged from 22 to 37, depending on heart rate (49-91 bpm). The most basal slice included in the analysis was located just above the mitral valve within the LV cavity. To be included, the basal myocardium had to be visible in the entire circumference at end-systole. The most apical slice was chosen as the one with the smallest visible LV cavity at end-systole. Since the sequences are ECG-gated, the end-diastolic frame corresponds to the first image of the sequence.

For each patient, the cine MRI dataset consisted of a succession of contiguous (no gap) LV short-axis 2D planes that were successively imaged over time (2D+t). The sequences were registered to the heart-cycle, and could therefore be stacked in order to construct 3D sequences. Taken together, these different planes from base to apex were considered a 3D representation of the LV. The succession of these, over time, is a 3D+t representation of the LV. Before applying any segmentation procedure, the images were over-sampled in order to provide isotropic voxels. For each sequence of 3D+t images, a single mouse click in the center of the LV cavity at end-systolic time was recorded, and the images were cropped centered on the corresponding location. Typically, the size of each volume of the sequence represents $100 \times 100 \times 40$ voxels. When a misalignment of the different sections of a same volume was observed, a translation-only registration procedure was applied.

4.2 Manual Segmentations

A conventional 2D manual segmentation of the LV myocardium was performed by two independent and blinded expert cardiologists. They used a software package that is well established for the post-processing of medical images (Analyze[®], Biomedical Imaging Resource, Mayo Clinic Foundation, Rochester, MN). These two experts are called e_1 and e_2 in the sequel. The cine-MR dataset was analyzed as a succession of 2D LV short-axis planes. For each slice location, the experts manually overlaid the endocardial and epicardial contours both at end-diastolic and end-systolic times. During manual tracing, papillary muscles and LV trabeculae were included within the LV myocardium. Then, the segmented slices were stacked to rebuilt a 3D object for quantification.

The time spent by the experts to manually segment one volume of a 3D+t sequence ranged from 15 to 20 minutes. For this reason, a manual segmentation is not available at every time-step, but only at end-diastolic and end-systolic times.

4.3 Automated segmentations

Once its parameters were estimated as described below, the automated method was applied on the 18 spatio-temporal sequences. An example of these segmentations is shown in Fig. 4.

The proposed method relies on a succession of operations, the results of which are precisely defined. Thus, each operator can be tuned separately: the parameters are independent. In our experiment, they were independently estimated

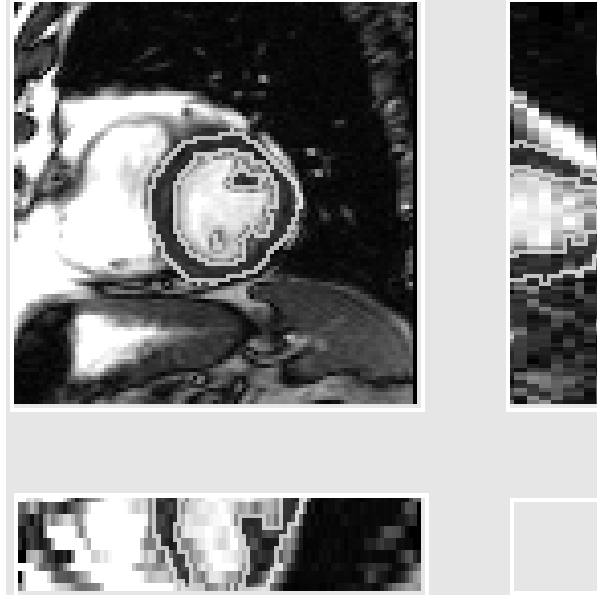


Fig. 4. Example of Left Ventricular Myocardium segmentation. Three orthogonal sections of a volume of the 4D image superimposed with the internal border of the segmented *LVM*.

by qualitative assessment performed by one of the two practitioners involved in the experimental study. Table 1 provides the values used in our experiment and give some details on the tests performed to obtain them.

From the proposed segmentation method, two kinds of parameters can be distinguished. A first series, denoted by r_i in the previous section, is related to the geometry of a left ventricle. A second one, denoted by s_i , is related to brightness properties of cardiac MR images. The former has to be estimated once at all. On the contrary, the second one must be re-estimated for each new device since the brightness properties of the left ventricle can change from one device to another one. The practitioner has worked for three hours (on three training 3D+t sequences) to set up both geometric and brightness related parameters. If the proposed method were used on a different device, only the brightness related parameters would need to be re-estimated. From our experience, this would require less than one hour. In our experiment the second series, related to the brightness properties of the images, was estimated once for each of the two groups of patients.

Table 1

Parameters of the automated segmentation process and comments on the method to obtain them.

parameter	value	comment
r_1	9 mm (\simeq 5 pixels)	tested values: from 3 to 8 pixels.
r_2	5 mm (\simeq 3 pixels)	tested values: from 1 to 5 pixels.
r_3	25 mm (\simeq 14 pixels)	maximal thickness of a LVM.
r_4	7 mm (\simeq 4 pixels)	tested values: from 3 to 5 pixels.
r_5	12 mm (\simeq 7 pixels)	tested values: from 5 to 10.
s_1	170; 190	highest threshold such that all points connected to the center of the volume belong to the LVC with certainty.
s_2	105; 120	highest threshold such that no points darker than s_2 belongs to the LVC.
s_3	20; 20	highest threshold such that no point darker than s_3 belongs to LVM.
s_4	170; 170	highest threshold such that no point brighter than s_4 belong to the LVM.

5 Experimental results

Based on the materials described in the previous section, we validate the five features of the method claimed in the introduction.

5.1 Accuracy

In order to characterize the accuracy of the proposed method we use different kinds of measures. The first one estimates the mean distance between the surfaces extracted from the automated segmentations and manual segmentations. The second one expresses the false positive and false negative volume of the automated segmentations. Then, the ability of the proposed method to produce reliable characteristics of the LV function (ejection fraction and myocardium mass) is assessed. Finally, a discussion about the relevance of these measurements is provided.

Table 2

Point-to-surface measurements from the results of different cardiac segmentation methods. For more details on our segmentations, refer to Table 3 (mean point to surface in mm \pm standard deviation).

	∂En	∂Ep
Lötjönen <i>et al.</i> (2004)	2.01 ± 0.31	2.77 ± 0.49
Mitchell <i>et al.</i> (2002)	2.75 ± 0.86	2.63 ± 0.76
Kaus <i>et al.</i> (2004)	2.28 ± 0.93	2.62 ± 0.75
Lorenzo-Valdes <i>et al.</i> (2004)	1.88 ± 2.00	2.75 ± 2.62
van Assen <i>et al.</i> (2006)	1.97 ± 0.54	2.23 ± 0.46
our method	1.42 ± 0.36	1.55 ± 0.23

5.1.1 Point-to-surface measurement

Given two surfaces ∂X and ∂Y represented by two sets of polygons, the *point-to-surface measurement* (P2S) from ∂X and ∂Y estimates the mean distance between the vertices of ∂X and ∂Y (see [38]). A symmetrical measure is obtained by taking the maximum of the P2S from ∂X and ∂Y and the P2S from ∂Y and ∂X .

The P2S achieved by other groups for segmenting the endocardial and epicardial border on their datasets are presented in Table 2.

On our dataset, the surfaces (∂En and ∂Ep) were extracted from the segmentations by a marching cube algorithm [39]. The P2S was computed from the segmentations obtained by the automated method and the two experts. In order to evaluate the inter-observer variability the P2S from the two experts is also provided. Table 3 present the mean and standard deviation of these measures at end-diastolic time and end-systolic time. We note that, in all cases of Table 3, the P2S is less than 1 pixel. We achieved a mean P2S of $1.51\text{mm} \pm 0.38$ for the endocardial border and a mean P2S of $1.81\text{mm} \pm 0.43$ for the epicardial border. These results compare favorably with those obtained by other groups on their own datasets (see Table 2). Furthermore, the P2S from automated and manual segmentations is in the same range as the inter-observer P2S. This is a strong indication that the automated method produces as satisfying a segmentation as either manual one.

Although the accuracy of the produced method is assessed by the P2S, these measures do not describe precisely the quality of the produced segmentations. In particular, the relative importance of the misclassified objects -a parameter that becomes crucial while quantifying the volume of the different objects- is not handled by the point-to-surface measurements.

Table 3

Details of the point to surface measurements from the results of our segmentation method (mean point to surface measurements in mm \pm standard deviation). In the table AM refers to the proposed automated method.

	AM vs. e_1	AM vs. e_2	e_1 vs. e_2
End-diastolic time			
∂E_n	1.48 ± 0.34	1.59 ± 0.44	1.29 ± 0.36
∂E_p	1.81 ± 0.26	1.43 ± 0.24	1.14 ± 0.16
End-systolic time			
∂E_n	1.44 ± 0.38	1.22 ± 0.24	1.07 ± 0.17
∂E_p	1.57 ± 0.24	1.42 ± 0.19	1.12 ± 0.15

5.1.2 False negative/positive volume fraction

In order to get a finer characterization of the accuracy of the proposed method, we also use the two following measures preconized by J. Udupa *et al.* in [40]. Let $Y \subseteq E$ be the reference segmentation and let $X \subseteq E$ be the segmentation that is to be evaluated. We set:

$$FNVF(X, Y) = \frac{|Y \setminus X|}{|Y|} \quad \text{and} \quad FPVF(X, Y) = \frac{|X \setminus Y|}{|Y|}$$

where $|X|$ denotes the number of elements in the set X .

These measures are expressed as a fraction of the volume of “true” delineation. The *FNVF* (False Negative Volume Fraction) indicates the fraction of tissue that was missed and *FPVF* (False Positive Volume Fraction) denotes the amount of tissue falsely identified as a fraction of the total amount of tissue in the “true” delineation.

In each of the 18 patients we computed *FNVF* and *FPVF* for:

- e_2 against e_1 ;
- automated method against e_1 ;
- e_1 against e_2 ; and
- automated method against e_2 .

These measures were computed for the three objects *LVC*, *LVC**M* and *LVM*. Table 4 presents the mean and standard deviation of these measures at end-diastolic and end-systolic times over the eighteen datasets. Remark that the errors between the two experts and between experts and software are in the same range: this indicates that in the task of segmenting *LVC*, *LVC**M*, *LVM*, the inter-expert errors are comparable to the errors between software and expert segmentations. However, we observe a tendency of the proposed method to underestimate *LVC* and *LVC**M*. Indeed, the false negatives are 1.5 to 4.5 times greater than the false positives. From a qualitative assessment, the two experts come to the conclusion that the automated contours are generally better localized than the manual ones. Underestimations of *LVC* and *LVC**M* can, thus, be seen as a side effect of the manual segmentation process. In Sec-

Table 4

Mean and standard deviation of FNVF, FPVF for the segmentations of *LVC*, *LVC**M* and *LVM* at end-diastolic and end-systolic time. In the tables, AM refers to the proposed automated method.

End-diastolic time							
		e_2 vs e_1	AM vs e_1			e_1 vs e_2	AM vs e_2
<i>LVC</i>	FNVF	0.06 ± 0.03	0.13 ± 0.03	<i>LVC</i>	FNVF	0.06 ± 0.01	0.12 ± 0.03
	FPVF	0.06 ± 0.02	0.03 ± 0.02		FPVF	0.07 ± 0.03	0.03 ± 0.01
<i>LVC</i> <i>M</i>	FNVF	0.06 ± 0.01	0.09 ± 0.02	<i>LVC</i> <i>M</i>	FNVF	0.01 ± 0.01	0.05 ± 0.02
	FPVF	0.01 ± 0.01	0.03 ± 0.01		FPVF	0.07 ± 0.01	0.04 ± 0.02
<i>LVM</i>	FNVF	0.20 ± 0.04	0.22 ± 0.04	<i>LVM</i>	FNVF	0.10 ± 0.03	0.15 ± 0.04
	FPVF	0.09 ± 0.03	0.20 ± 0.06		FPVF	0.22 ± 0.06	0.25 ± 0.10

End-systolic time							
		e_2 vs e_1	AM vs e_1			e_1 vs e_2	AM vs e_2
<i>LVC</i>	FNVF	0.10 ± 0.04	0.16 ± 0.06	<i>LVC</i>	FNVF	0.06 ± 0.03	0.13 ± 0.05
	FPVF	0.06 ± 0.03	0.05 ± 0.03		FPVF	0.10 ± 0.04	0.05 ± 0.03
<i>LVC</i> <i>M</i>	FNVF	0.07 ± 0.01	0.07 ± 0.03	<i>LVC</i> <i>M</i>	FNVF	0.02 ± 0.01	0.04 ± 0.02
	FPVF	0.02 ± 0.01	0.04 ± 0.02		FPVF	0.07 ± 0.02	0.06 ± 0.02
<i>LVM</i>	FNVF	0.14 ± 0.04	0.14 ± 0.03	<i>LVM</i>	FNVF	0.08 ± 0.03	0.09 ± 0.02
	FPVF	0.07 ± 0.02	0.15 ± 0.07		FPVF	0.15 ± 0.05	0.17 ± 0.08

tion 5.1.4, we explain some of the bias due the manual segmentation process.

5.1.3 Assessment of critical parameters

Left ventricular ejection fraction (EF) and left ventricular myocardium mass (MM) are critical parameters for cardiac diagnosis and remodeling prevention. Their estimation is routinely used by cardiologists. The EF is the amount of blood ejected during a heart cycle expressed as a fraction of the tele-diastolic volume. In our dataset the EF (resp. MM) range was 29-75% (resp. 92-197 g).

From the segmented images, the EF can be simply computed by $(|LVC_{\max}| - |LVC_{\min}|) / |LVC_{\max}|$, where $|LVC_{\max}|$ (resp. $|LVC_{\min}|$) is the maximal (resp. minimal) volume of the left ventricular chamber along the heart cycle. Let X_p^o denote the measure of the parameter X performed by operator o for patient p , where $X \in \{EF, MM\}$, $o \in \{e_1, e_2, s\}$, and $p \in [1, 18]$. We take $refX_p = (X_p^{e_1} + X_p^{e_2})/2$ as a reference value for the parameter X on patient p and we evaluate the deviation $\Delta X_p^o = |X_p^o - refX_p| / refX_p$. Notice that $\Delta X_p^{e_1} = \Delta X_p^{e_2}$. The results of these deviations for the 18 datasets are depicted in Fig. 5. Over all 18 patients, the automated method achieved a mean deviation on the EF (resp. MM) of 0.045 (resp. 0.069) whereas the experts achieved 0.040 (resp. 0.059). Furthermore, observe on Fig. 5 that ΔEF_p^s (resp. ΔMM_p^s) is less than $\Delta EF_p^{e_1}$ (resp. $\Delta MM_p^{e_1}$) in 9 (resp. 9) of the 18 patients. In other words, the deviation on the EF (resp. MM) achieved by the software

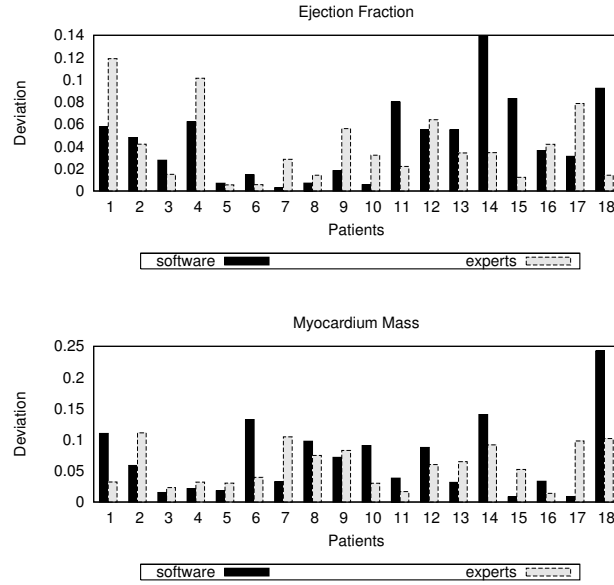


Fig. 5. The deviation of the ejection fraction (resp. myocardium mass) for the 18 patients obtained by the experts and our automatic software is plotted on top (resp. bottom).

is less than the deviation achieved by the experts in 9 (resp. 9) of the 18 patients. We conclude that the automated tool produces reliable assessment of left ventricular functional parameters comparable to the experts’.

Further statistical validations, including Bland-Altman plots, can be found on the database web-site.

5.1.4 Discussion about manual segmentation and inter-expert variability

In Sections 5.1.1 and 5.1.2, we have seen that there is an important variability between the segmentations made by the two experts. In this paragraph, we investigate this problem and give several explanations.

In Fig. 6, we present details of typical segmentations obtained by the two experts and by the software for a same 3D image. Observe that the *LVM* segmented by e_1 is significantly thinner than the one segmented by e_2 . Remark that in location A, expert e_1 did not recognize a part of the papillar muscle which was indeed segmented by e_2 and by the software. In location B, the myocardium segmented by e_1 has a hole, which does not conform to the ground

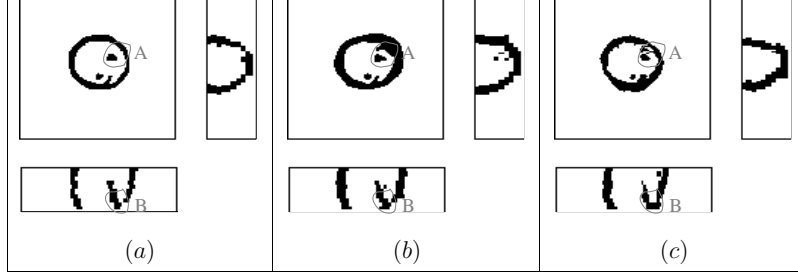


Fig. 6. Examples of segmentations performed by e_1 (a), e_2 (b) and our method (c).

truth. We recall that the software avoids, by construction, such situations and we observe that e_2 's segmentation has no hole.

Several explanations can be given. On the one hand, expert segmentations are realized exclusively on 2D images, which introduces a bias. Neither the spatial coherency between the successive 2D sections of a 3D image, nor the temporal coherency with the previous and next images of the sequence are taken into account. On the other hand, the precise delineation, pixel after pixel, is a very difficult task for human operators. It is well known that, in general, human operators can outperform computerized procedure in the recognition task whereas algorithms can generally perform delineation better than humans. Finally, we point out that there is no standardized procedure for manual segmentation of *LVM* in cardiac MR-images as it can be the case for other segmentation tasks in other modalities [41]. Therefore, the physicians who made this evaluation believe that the automated method generally outperforms manual analysis.

5.2 Temporal consistency

The proposed automated procedure has been tested using the 4D watershed-based method described in Section 3 and also with a variant using only 3D watersheds (one per volume V_i). Compared to manual segmentations, the accuracy –P2S from manual and automated methods over the eighteen sequences– of the two procedures is approximately the same. In short, there is no benefit of using the 4D procedure in terms of accuracy. However, it is visible on the computer screen (see, for instance, Fig. 7) that, contrary to the 3D variant, the 4D algorithm helps keeping the temporal coherency between successive segmentations along the heart cycle. In order to precisely evaluate this temporal coherency, we compute, for both methods, the P2S between successive ∂Eps along the cardiac cycle. The means of these measurements among all patients are plotted along the cardiac cycle in Fig. 8. We observe that both curves have the same shape but that there is a nearly constant difference between them.

Thus, this confirms the fact that segmentations obtained by the 4D method are more regular.

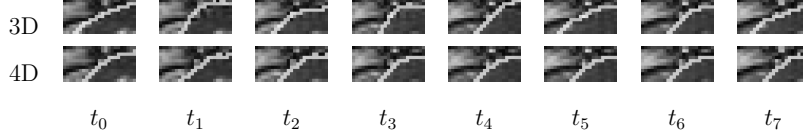


Fig. 7. Illustration of the impact of 4D watershed. First row: detail on the result of the segmentation process using 3D watershed: the contour oscillates along the time. Second row: detail on the result of the segmentation process using 4D watershed: the contour smoothly evolves along the time.

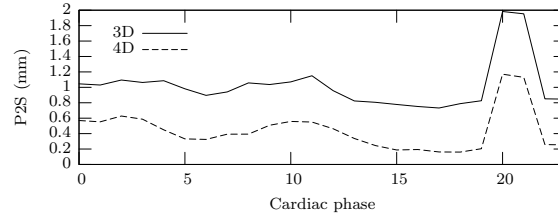


Fig. 8. The point to surface measurements between the successive ∂Eps along the cardiac cycle.

The segmentation of endocardial borders is performed independently on each 3D volume of the sequence. Nevertheless, we have not noticed any regularity problem in the ∂Ens produced by the automated software. This explains why we have not developed a 4D procedure to segment the *LVC*.

5.3 Robustness

The values s_1 and s_2 of the two thresholds used to recognize the endocardial borders may appear as the most sensitive parameters of the whole automated process. In order to estimate the robustness of the automated method with respect to variation of these values, the mean of the P2S from the automated and manual endocardial borders was computed over the eighteen patients for different values of s_1 and s_2 . The surface plotted in Fig. 9 depicts the mean P2S as a function of the deviation (in %) of s_1 and s_2 . From the figure, we can observe that in the worst case *i.e.*, $s_1 = 135$ (-20%), $s_2 = 75$ (-30%)—the mean P2S is equal to 3.5 millimeters. This corresponds approximately to 5% of the height of a *LVC* (60 mm). We also remark that the surface is relatively flat and convex and that it contains a unique minimum. The two previous remarks constitute a strong indication of the method's robustness with respect to s_1 and s_2 . It also suggests that an automated procedure could

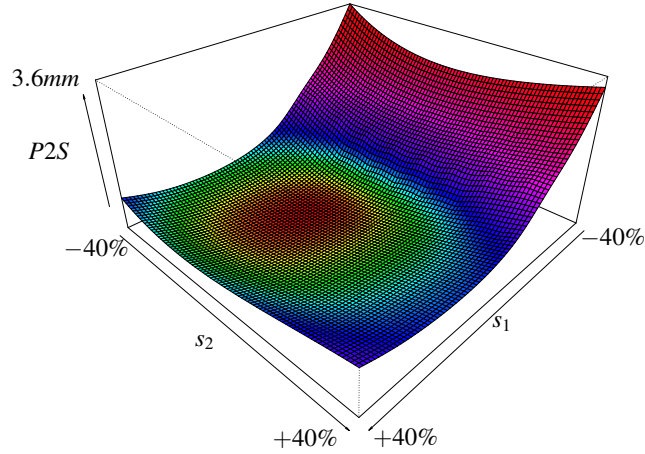


Fig. 9. Mean P2S (over 18 sequence) achieved by the automated method for endocardial segmentation as a function of the deviation of the parameters s_1 and s_2 .

be used to find the ideal parameters, but such a procedure is not necessary since the manual setting is fast. Therefore, the setting of these parameters, using for instance the procedure detailed in Table 1, cannot be considered as a bottleneck for the use of the automated method on images from other MR scanners.

The robustness of the method with respect to small variations on the other parameters has been qualitatively verified during experimentation.

5.4 Time efficiency

The time efficiency of a given method is composed of two factors: both computational time and human operator time need to be considered [40].

There are two kinds of human operator time to take into account. First, training the method on a new device takes less than one hour (Section 4.3). On the other hand, during the segmentation process, the only human interaction is a single mouse click in one of the 3D volumes of the whole sequence. This step could be automated but the physicians who made the evaluation prefer to keep this control point.

The method has been implemented in *C* and runs on both Linux and Windows.

On a low-end computer laptop (Pentium 4, 3.06 GHz, 512 MB), the maximum (resp. minimum) computational time over the eighteen experimented datasets is 4'3" (resp. 2'). These values compare favorably to the time requested by other cardiac segmentation methods (from 3' [6] to several hours for segmenting 25 volumes). We also remind that about 20 minutes are requested for manually segmenting a single 3D volume (hence about 8 hours per sequence). The proposed approach yields time-saving visualization and quantitative assessment of left ventricular functional parameters in 4D cardiac cine-MR images.

Conclusion and perspectives

In this paper, we propose a fast and automated method to segment the left ventricular myocardium in 4D cine-MRI sequences. The successive segmentations obtained over the time take into account spatiotemporal properties of the images. Thanks to the comparison with manual segmentation performed by two cardiologists, we demonstrate the accuracy of the proposed method and the relevance of the ejection fraction and myocardium mass derived from the automated segmentations. Therefore, this automated method can be used in clinical routine.

The proposed scheme does not allow the direct derivation of deformation parameters. Such deformation parameters can be obtained thanks to a model of the heart movement, and such a heart model needs the obtained segmentations as control points. Future work will aim at computing deformation fields whose accuracy will be improved by registration with other modalities such as delayed enhanced MRI and CT scan.

Acknowledgment

This work results of collaboration between the cardiology department of the Henri Mondor Hospital and the Discrete Geometry and Imagery group of the Gaspard-Monge Institute at ESIEE.

The authors would like to thank Pr. A. Rahmouni at CHU Henri Mondor for providing the cine-MR images.

References

- [1] P. T. Buser, W. Auffermann, W. W. Holt, S. Wagner, B. Kircher, C. Wolfe, C. B. Higgins, Noninvasive evaluation of global left ventricular function with use of cine nuclear magnetic resonance, *Journal of the American College of Cardiology* 2 (13) (1989) 1294–1300.
- [2] L. Najman, J. Cousty, M. Couprie, H. Talbot, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen, J. Garot, An open, clinically-validated database of 3D+t cine-MR images of the left ventricle with associated manual and automated segmentations, *Insight Journal* Special issue entitled ISC/NA-MIC Workshop on Open Science at MICCAI 2007.
- [3] T. McInerney, D. Terzopoulos, A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis, *Computerized Medical Imaging and Graphics* 19 (1) (1995) 69–83.
- [4] R. J. van der Geest, V. G. M. Buller, E. Jansen, H. J. Lamb, L. H. B. Baur, E. E. van der Wall, A. de Roos, J. H. C. Reiber, Comparison between manual and semiautomated analysis of left ventricular parameters from short-axis MR images, *Journal of Computer Assisted Tomography* 21 (1997) 756–765.
- [5] S. C. Mitchell, B. P. F. Lelieveldt, R. J. van der Geest, H. G. Bosch, J. H. C. Reiber, M. Sonka, Multistage hybrid active appearance model matching: Segmentation of left and right ventricles in cardiac mr images, *IEEE Trans. on Medical Imaging* 20 (1997) 415–423.
- [6] M. R. Kaus, J. von Berg, J. Weese, W. Niessen, V. Pekar, Automated segmentation of the left ventricle in cardiac MRI, *Medical Image Analysis* 8 (2004) 245–254.
- [7] J. Lötjönen, S. Kivistö, J. Koikkalainen, D. Smutek, K. Lauerma, Statistical shape model of atria, ventricles and epicardium from short- and long-axis MR images, *Medical Image Analysis* 8 (2004) 371–386.
- [8] H. van Assen, M. G. Danilouchkine, A. F. Frangi, S. Ordás, J. J. M. Westenberg, J. H. C. Reiber, B. P. F. Lelieveldt, SPASM: A 3D-ASM for segmentation of sparse and arbitrarily oriented cardiac MRI data, *Medical Image Analysis* 10 (2006) 286–303.
- [9] R. van der Geest, B. Lelieveldt, E. Angelié, M. Danilouchkine, C. Swingen, M. Sonka, J. Reiber, Evaluation of a new method for automated detection of left ventricular boundaries in time series of magnetic resonance images using an active appearance motion model, *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance* 6 (3) (2004) 609–617.
- [10] M. Üzümcü, R. van der Geest, C. Swingen, J. Reiber, B. Lelieveldt, Time continuous tracking and segmentation of cardiovascular magnetic resonance images using multidimensional dynamic programming, *Investigative Radiology* 41 (1) (2006) 52–62.

- [11] J. von Berg, C. Lorenz, Multi-surface cardiac modelling, segmentation and tracking, in: *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, Vol. 3504 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2005, pp. 1–11.
- [12] K. Fritscher, R. Pilgram, R. Schubert, Automatic cardiac 4D segmentation using level sets, in: *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, Vol. 3504 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2005, pp. 113–122.
- [13] M. Lorenzo-Valdés, G. I. Sanchez-Ortiz, A. G. Elington, R. H. Mohiaddin, D. Rueckert, Segmentation of 4D cardiac MR images using a probabilistic atlas and the EM algorithm, *Medical Image Analysis* 10 (2006) 286–303.
- [14] J. Montagnat, H. Delingette, 4D deformable models with temporal constraints: application to 4D cardiac image segmentation, *Medical Image Analysis* 9 (2005) 87–100.
- [15] S. Beucher, F. Meyer, The morphological approach to segmentation: the watershed transformation, E. Dougherty (Ed.), *Mathematical Morphology in Image Processing*, Marcel Dekker (1993) 443–481.
- [16] P. Soille, *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, 1999.
- [17] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. II: *Theoretical Advances*, Academic Press, 1988.
- [18] J. Serra, A lattice approach to image segmentation, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 24 (2006) 83–130.
- [19] S. Beucher, C. Lantuejoul, Use of watershed in contour detection, in: *Int. Workshop on Image Processing: Real-time Edge and Motion detection/estimation*, 1979.
- [20] G. Bertrand, On topological watersheds, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2-3) (2005) 217–230.
- [21] M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Quasi-linear algorithms for the topological watershed, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22 (2-3) (2005) 231–249.
- [22] L. Najman, M. Couprie, G. Bertrand, Watersheds, mosaics and the emergence paradigm, *Discrete Applied Mathematics* 147 (2-3) (2005) 301–324.
- [23] P. E. Danielson, Euclidean distance mapping, *Computer Graphics and Image Processing* 14 (3) (1980) 227–248.
- [24] T. Saito, J. Toriwaki, New algorithms for Euclidean distance transformation of an n -dimensional digitized picture with applications, *Pattern Recognition* 27 (1994) 1551–1565.
- [25] T. Hirata, A unified linear-time algorithm for computing distance maps, *Information Processing Letters* 58 (3) (1996) 129–133.

-
- [26] A. Meijster, J. Roerdink, W. Hesselink, A general algorithm for computing distance transforms in linear time, Vol. 18 of *Computational Imaging and Vision*, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 331–340.
- [27] G. Bertrand, Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids, *Pattern Recognition Letters* 15 (1994) 1003–1011.
- [28] M. Couprie, D. Coeurjolly, R. Zour, Discrete bisector function and Euclidean skeleton in 2D and 3D, *Image and Vision Computing* 25 (10) (2007) 1543–1556.
- [29] M. Couprie, A. V. Saúde, G. Bertrand, Euclidean homotopic skeleton based on critical kernels, in: *IEEE 19th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, 2006, pp. 307–314.
- [30] P. Dokládal, I. Bloch, M. Couprie, D. R. R. Urtasun, L. Garnero, Topologically controlled segmentation of 3d magnetic resonance images of the head by using morphological operators, *Pattern Recognition* 36 (10) (2003) 2463–2478.
- [31] N. Passat, C. Ronse, J. Baruthiob, J.-P. Armspachb, J. Foucherc, Watershed and multimodal data for brain vessel segmentation: Application to the superior sagittal sinus, *Image and Vision Computing* 25 (4) (2007) 512–521.
- [32] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie, Watersheds, minimum spanning forests, and the drop of water principle, submitted. Also in technical report IGM2007-01, <http://igm.univ-mlv.fr/LabInfo/rapportsInternes/2007/01.pdf>.
- [33] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, M. Couprie, Watershed cuts, in: 8-th International Symposium on Mathematical Morphology, 2007, to appear, p. ??
- [34] J. Cousty, L. Najman, M. Couprie, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen, J. Garot, Automated accurate and fast segmentation of 4D cardiac MR images, in: *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, Vol. 4466 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2007, pp. 474–483.
- [35] T. Kong, A. Rosenfeld, Digital topology: Introduction and survey, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 48 (3) (1989) 357–393.
- [36] M. Couprie, G. Bertrand, Topological grayscale watershed transform, in: *SPIE Vision Geometry V Proceedings*, Vol. 3168, 1997, pp. 136–146.
- [37] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman, G. Bertrand, Grayscale watersheds on perfect fusion graphs, in: *Combinatorial Image Analysis*, Vol. 4040 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2006, pp. 60–73.
- [38] N. Aspert, D. Santa-Cruz, T. Ebrahimi, MESH: measuring errors between surfaces using the Hausdorff distance, in: *IEEE International Conference in Multimedia and Expo*, Vol. 1, 2002, pp. 705–708.
- [39] X. Daragon, M. Couprie, G. Bertrand, Discrete frontiers, in: *Discrete geometry for computer imagery*, Vol. 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2003, pp. 236–245.

- [40] J. Udupa, V. LeBlanc, Y. Zhuge, C. Imielinska, H. Schmidt, L. Currie, B. Hirsch, J. Woodbrun, A framework for evaluating image segmentation algorithms, *Computerized Medical Imaging and Graphics* 30 (2006) 75–87.
- [41] L. Bonilha, E. Kobayashi, F. Cendes, L. Min-Li, Protocol for volumetric segmentation of temporal structures using high-resolution 3-D magnetic resonance imaging, *Human Brain Mapping* 22 (2004) 145–154.
- [42] L. Vincent, P. Soille, Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13 (6) (1991) 583–598.
- [43] T. H. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, *Introduction to algorithms*, second edition, MIT Press, 2001.

A Repulsed dilation

Let $x \in V_t$ and $r \in \mathbb{R}^+$, we denote by $B_r(x)$ the ball of radius r centered on x , defined by $B_r(x) = \{y \in V_t \mid d(x, y) \leq r\}$, where d is a distance on V_t .

The *dilation* by B_r is the operator δ^r defined by: $\forall X \subseteq V_t, \delta^r(X) = \cup_{x \in X} B_r(x)$.

We remark that dilating a subset X of V_t by a ball B_r is equivalent to computing the points closer to X than to the complementary of the dilation of X by B_{2r} .

Let $X \subseteq V_t$ and let $Y \subseteq V_t \setminus X$ be a repulsing set. Let r be a positive integer. Let X' be the dilation of X by B_{2r} . We define the *dilation of X by B_r repulsed by Y* , denoted by $\delta^r(X, Y)$, as the set $\{x \in E \mid d(x, X) \leq d(x, \overline{X'} \cup Y)\}$.

Computing a repulsed (Euclidean) dilation can be performed thanks to Euclidean skeleton by influence zones (see [16], chapter 5.4.5), which is a generalization of Voronoi diagram to the case of connected input sites. In the case of digital images, its computation consists in a watershed of the Euclidean distance transform [24–26] which can be performed in linear time.

B Watershed cuts

Many approaches [15, 20, 36, 42] have been proposed to define and/or compute the watershed of a vertex-weighted graph corresponding to a grayscale image. The digital image is seen as a topographic surface: the gray level of a pixel becomes the elevation of a point, the basins and valleys of the topographic

surface correspond to dark areas, whereas the mountains and crest lines correspond to light areas. In a recent paper [33], we investigate the watersheds in a different framework: we consider a graph whose edges are weighted by a cost function. A watershed of a topographic surface may be thought of as a separating line-set on which a drop of water can flow down toward several minima. Following this intuitive idea, we introduce the definition of watershed cuts in edge-weighted graphs. In [33], we establish the consistency (with respect to characterizations of the catchment basins and dividing lines) of watershed cuts and prove their optimality (in terms of minimum spanning forests).

In this appendix, we assume that $G = (V, E)$ is the graph defined in Section 3.1 and that ∇ is the function derived from the image I as presented in Section 3.3.3. The map ∇ assigns a weight to each edge of G . Therefore, together with the map ∇ , G is an edge-weighted graph.

The notions of minimum, extension [20, 33] and graph cut play an important role for defining a watershed in an edge-weighted graph.

Intuitively, the regions of a watershed (also called catchment basins) are associated with the regional minima. Each catchment basin contains a unique regional minimum, and conversely, each regional minimum is included in a unique catchment basin: the regions of the watershed “extend” the minima.

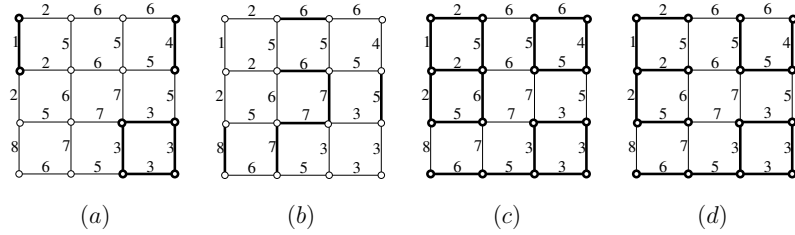


Fig. B.1. A graph G and a map F . Edges and vertices in bold depict: (a), the minima of F ; (b), a watershed S of F ; (c), an extension of M which is equal to \bar{S} ; and (d), a MSF relative to M .

A subgraph X of G is a *(regional) minimum of ∇* (at weight $k \in \mathbb{Z}$) if: *i*) X is connected; *ii*) k is the weight of any edge of X ; and *iii*) the altitude of any edge adjacent to X is strictly greater than k .

We denote by M the graph whose vertex set and edge set are, respectively, the union of the vertex sets and edge sets of all minima of ∇ .

We say that a subgraph X of G is an *extension of M* if M is a subgraph of X and if any component of X contains exactly one component of M .

Let $S \subseteq E$. We say that S is a *(graph) cut for M* if the graph induced by \bar{S} is an extension of M and if S is minimal for this property, *i.e.*, if $T \subseteq S$ and the graph induced by \bar{T} is an extension of M , then $T = S$.

The subgraph M in bold in Fig. B.1a corresponds to the minima of the depicted map. The subgraphs in bold in Fig. B.1c and d are two extensions of M . The bold edges in Fig. B.1b is a cut for M .

From now on, we will also denote by ∇ the map from V to \mathbb{Z} such that for any $x \in V$, $\nabla(x)$ is the minimal altitude of an edge which contains x , i.e., $\nabla(x) = \min\{\nabla(u) \mid u \in E, x \in u\}$; $\nabla(x)$ is the altitude of x .

Let $\pi = \langle x_0, \dots, x_l \rangle$ be a path in G . The path π is a *path with steepest descent* for ∇ if, for any $i \in [1, l]$, $\nabla(x_{i-1}, x_i) = \nabla(x_{i-1})$.

Definition 1 (watershed cuts, [33]) Let $S \subseteq E$ be a cut for M . The set S is a watershed cut of F if, from each point of V to M , there exists a path in the graph induced by S which is a path with steepest descent for ∇ .

The set of bold edges in Fig. B.1b is a watershed cut of the depicted map. In [32, 33], we derive powerful and exact algorithms to compute, in linear time, a watershed of any edge-weighted graph.

Let us now recall the optimality principle of watershed cut. We first remind the definition of a minimum spanning forest relative to the minima of G and then state the equivalence between watershed cuts and cuts induced by minimum spanning forests relative to the minima.

We say that a subgraph X of G is a *spanning forest relative to M* if X is an extension of M and if each cycle of X is a cycle of M .

The subgraph in Fig. B.1d is a spanning forest relative to the subgraph M (Fig. B.1a).

The *weight* of a subgraph X of G is the sum of its edge weights i.e., $F(X) = \sum_{u \in E(X)} F(u)$, where $E(X)$ is the set of all edges of X .

We say that a subgraph X of G is a *minimum spanning forest (MSF) relative to M* if X is a spanning forest relative to M and if the weight of X is less than or equal to the weight of any other spanning forest relative to M . If X is a MSF relative to M , then there exists a unique cut S for X (which is also a cut for M). We say that this cut is a *MSF cut for M* .

Theorem 2 (optimality, [33]) Let $S \subseteq E$. The set S is MSF cut for M if and only if S is a watershed cut of F .

The minimum spanning tree problem is one of the most typical and well-known problems of combinatorial optimization (see [43]). In [32, 33], we show that the minimum spanning tree problem is equivalent to the problem of finding a MSF relative to a subgraph of G .

Bibliographie

Ouvrages Imprimés

- [1] P. Alexandroff. *Combinatorial topology*. Graylock Press, 1956.
- [2] L. Ford et D. Fulkerson. *Flows in networks*. Princeton University Press, 1962.
- [3] A. Rosenfeld. *Picture Processing by Computer*. Academic Press, 1969.
- [4] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- [5] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. J. Wiley, New-York, 1975.
- [6] T. Pavlidis. *Structural Pattern Recognition*, volume 1 of *Springer Series in Electrophysics*. Springer, 1977. Segmentation techniques, chapter 4–5.
- [7] P. Giblin. *Graphs, surfaces and homology*. Chapman and Hall, 1981.
- [8] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [9] A. Rosenfeld et A.C. Kak. *Digital picture processing*, volume 2. Academic Press, 1982. Section 10.4.2.d (Region merging).
- [10] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume II : Theoretical Advances. Academic Press, 1988.
- [11] M. Schmitt et J. Mattioli. *Morphologie Mathématique*. Masson, 1993.
- [12] H.J.A.M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Advances in ELECTRONICS and ELECTRON PHYSICS. Academic Press, 1994.
- [13] M. Gondran et M. Minoux. *Graphes et algorithmes*, volume 3ème édition. Eyrolles, 1995.
- [14] R. Diestel. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.
- [15] P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer-Verlag, 1999.
- [16] T. H. Cormen, C. Leiserson et R. Rivest. *Introduction to algorithms, second edition*. MIT Press, 2001.
- [17] L. Najman et H. Talbot. *Morphologie mathématique*. IC2 - Information-Commande-Communication Traité en 240 volumes. Hermes Sciences, 2008. à paraître.

Chapitres d'ouvrages collectifs

- [18] L.W. Beineke. On derived graphs and digraphs. Dans H. Sachs, H.J. Voss et H. Walther, editors, *Beiträge zur graphen theorie*, pages 17–23. Teubner, 1968.

- [19] G. Bertrand, M. Couprie, J. Cousty et L. Najman. *Morphologie mathématique*, chapitre Ligne de partage des eaux dans les espaces discrets. IC2 - Information - Commande - Communication Traité en 240 volumes. Hermes Sciences, à paraître.
- [20] J. Cousty, L. Najman et M. Couprie. *Morphologie mathématique*, chapitre Segmentation cardiaque spatio-temporelle. IC2 - Information - Commande - Communication Traité en 240 volumes. Hermes Sciences, à paraître.

Travaux Universitaires

- [21] X. Daragon. *Surfaces discrètes et frontières d'objets dans les ordres*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2005.

Articles de revues

- [22] J. Maxwell. On hills and dales. *Philosophical Magazine*, 4/40 :421–427, 1870.
- [23] C. Jordan. Nouvelles observations sur les lignes de faîtes et de thalweg. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 75 :1023–1025, 1872.
- [24] J. Radon. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. *Ber. Ver. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl.*, 69 :262–277, 1917. En allemand. Voir S. R. Deans : *The Radon Transform and Some of Its Application*, pour une traduction en anglais.
- [25] P.S. Alexandroff. Diskrete raume. *Mat. Sbornik*, 2 :501–518, 1937.
- [26] R.C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell Syst. Tech. J.*, 36 :1389–1401, 1957.
- [27] C. R. Brice et C. L. Fenema. Scene analysis using regions. *Artificial Intelligence*, pages 205–226, 1970.
- [28] C.T. Zahn. Graph-theoretical methods for detecting and describing gestalt clusters. *IEEE Transactions on Computers*, C-20(1) :99–112, 1971.
- [29] G. N. Hounsfield. Computerized transverse axial scanning (tomography) : I. description of system. *British Journal of Radiology*, 46(552) :1016–1022, 1973.
- [30] R. E. Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the ACM*, 22 :215–225, 1975.
- [31] S.L. Horowitz et T. Pavlidis. Picture segmentation by a tree traversal algorithm. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 23(2) :368–388, 1976.
- [32] R. Ohlander, K. Price et D.R. Reddy. Picture segmentation using a recursive region splitting method. *Computer Graphics and Image Processing*, 8(3) :313–333, 1978.
- [33] A. Rosenfeld. On connectivity properties of grayscale pictures. *Pattern Recognition*, 16 :47–50, 1983.
- [34] R. L. Graham et P. Hell. On the history of the minimum spanning tree problem. *Annals of the History of Computing*, 7 :43–57, 1985.
- [35] R. Deriche. Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *The International Journal of Computer Vision*, 1(2) :167–187, Mai 1987.

-
- [36] T.Y. Kong et A. Rosenfeld. Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3) :357–393, 1989.
- [37] P. T. Buser, W. Auffermann, W. W. Holt, S. Wagner, B. Kircher, C. Wolfe et C. B. Higgins. Noninvasive evaluation of global left ventricular function with use of cine nuclear magnetic resonance. *Journal of the American College of Cardiology*, 13(6) :1294–1300, 1989.
- [38] L. Vincent et P. Soille. Watersheds in digital spaces : An efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6) :583–598, June 1991.
- [39] C. Gratin et F. Meyer. Mathematical morphology in three dimensions. *Acta Stereologica*, pages 551–558, 1992. (Suppl. 1).
- [40] J. Serra et L. Vincent. An overview of morphological filtering. *Circuits Systems Signal Process*, 11(1) :48–107, 1992.
- [41] S. Beucher et F. Meyer. The morphological approach to segmentation : the watershed transformation. *E. Dougherty (Ed.), Mathematical Morphology in Image Processing, Marcel Dekker*, pages 443–481, 1993.
- [42] F. Meyer. Topographic distance and watershed lines. *Signal Processing*, 38(1) :113–125, 1993.
- [43] L. Najman et M. Schmitt. Watershed of a continuous function. *Signal Processing*, 38(1) :68–86, 1993.
- [44] J. Cenens, R. Huis, B. Chauvaux, J. Dereppe, C. Gratin et F. Meyer. 3D cellular structure characterization of flexible polyurethane foam. *American Society of Mechanical Engineers, Materials Division (Publication) MD*, 53 :29–44, 1994.
- [45] P. Soille et C. Gratin. An efficient algorithm for drainage network extraction on DEMs. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 5(2) :181–189, 1994.
- [46] T. Saito et J.I. Toriwaki. New algorithms for Euclidean distance transformation of an n -dimensional digitized picture with applications. *Pattern Recognition*, 27 :1551–1565, 1994.
- [47] G. Bertrand. Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids. *Pattern Recognition Letters*, 15 :1003–1011, 1994.
- [48] T. McInerney et D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19 :69–83, 1995.
- [49] J. K. Udupa et S. Samarsekara. Fuzzy connectedness and object definition : Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Graphical Models and Image Processing*, 58 :246–261, 1996.
- [50] L. Najman et M. Schmitt. Geodesic saliency of watershed contours and hierarchical segmentation. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(12) :1163–1173, December 1996.
- [51] E.J. Breen et R. Jones. Attribute openings, thinnings and granulometries. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3) :377–389, 1996.
- [52] T. Hirata. A unified linear-time algorithm for computing distance maps. *Information Processing Letters*, 58(3) :129–133, 1996.

- [53] R.J. van der Geest, V.G.M. Buller, E. Jansen, H.J. Lamb, L.H.B. Baur, E.E. van der Wall, A. de Roos et J.H.C. Reiber. Comparison between manual and semiautomated analysis of left ventricular parameters from short-axis MR images. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 21 :756–765, 1997.
- [54] K. Haris, S. N. Efstratiadis, N. Maglaveras et A. K. Katsaggelos. Hybrid image segmentation using watersheds and fast region merging. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(12) :1684–1699, 1998.
- [55] A. Bleau et L.J. Leon. Watershed-based segmentation and region merging. *Computer Vision and Image Understanding*, 77(3) :317–370, 2000.
- [56] B. Chazelle. A minimum spanning tree algorithm with inverse-Ackermann type complexity. *Journal of the ACM*, 47 :1028–1047, 2000.
- [57] P. K. Saha, J. K. Udupa et D. Odhner. Scale-based connected image segmentation : Theory, algorithms and validation. *Computer Vision and Image Understanding*, 77 :145–174, 2000.
- [58] F. Meyer. An overview of morphological segmentation. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 15 :1089–1118, 2001.
- [59] T. Cootes, G. Edwards et C. Taylor. Active appearance models. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(6) :681–685, 2001.
- [60] J. B. T. M. Roerdink et A. Meijster. The watershed transform : Definitions, algorithms and parallelization strategies. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2) :187–228, 2001.
- [61] P. K. Saha et J. K. Udupa. Relative fuzzy connectedness among multiple objects : Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Computer Vision and Image Understanding*, 82 :42–56, 2001.
- [62] Y. Boykov, O. Veksler et R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(6) :1222–1239, 2001.
- [63] S.C. Mitchell, B.P.F. Lelieveldt, R.J. van der Geest, H.G. Bosch, J.H.C. Reiber et M. Sonka. Multistage hybrid active appearance model matching : Segmentation of left and right ventricles in cardiac MR images. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 20 :415–423, 2001.
- [64] J. Nešetřil, E. Milková et H. Nešetřilová. Otakar Borůvka on minimum spanning tree problem. Translation of both 1926 papers, comments, history. *Discrete Mathematics*, 233 :3–36, 2001.
- [65] M. Couprie, F.N. Bezerra et G. Bertrand. Topological operators for grayscale image processing. *Journal of Electronic Imaging*, 10(4) :1003–1015, 2001.
- [66] J. K. Udupa, P. K. Saha et R. A. Lotufo. Relative fuzzy connectedness and object definition : Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(11) :1485–1500, 2002.
- [67] U. Braga-Neto et J. Goutsias. A theoretical tour of connectivity in image processing and analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 19 :5–31, 2003.
- [68] A. X. Falcão, J. Stolfi et R. de Alencar Lotufo. The image foresting transform : theory, algorithm and applications. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26 :19–29, 2004.
- [69] J. Lötjönen, S. Kivistö, J. Koikkalainen, D. Smutek et K. Lauerma. Statistical shape model of atria, ventricles and epicardium from short- and long-axis MR images. *Medical Image Analysis*, 8 :371–386, 2004.

-
- [70] M.R. Kaus, J. von Berg, J. Weese, W. Niessen et V. Pekar. Automated segmentation of the left ventricle in cardiac MRI. *Medical Image Analysis*, 8 :245–254, 2004.
 - [71] G. Bertrand. On topological watersheds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3) :217–230, May 2005.
 - [72] L. Najman, M. Couprie et G. Bertrand. Watersheds, mosaics and the emergence paradigm. *Discrete Applied Mathematics*, 147(2-3) :301–324, 2005.
 - [73] M. Couprie, L. Najman et G. Bertrand. Quasi-linear algorithms for the topological watershed. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2-3) :231–249, 2005.
 - [74] J. Montagnat et H. Delingette. 4D deformable models with temporal constraints : application to 4D cardiac image segmentation. *Medical Image Analysis*, 9 :87–100, 2005.
 - [75] J.K. Udupa, V.R. LeBlanc, Y. Zhuge, C. Imielinska, H. Schmidt, L.M. Currie, B.E. Hirsch et J. Woodbrun. A framework for evaluating image segmentation algorithms. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 30 :75–87, 2006.
 - [76] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. Snakes : active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 30 :75–87, 2006.
 - [77] J. Serra. A lattice approach to image segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(1) :83–130, 2006.
 - [78] L. Najman et M. Couprie. Building the component tree in quasi-linear time. *IEEE Trans. Image Processing*, 15(11) :3531–3539, 2006.
 - [79] Y. Zhuge, J. K. Udupa et P. K. Saha. Vectorial scale-based fuzzy-connected image segmentation. *Computer Vision and Image Understanding*, 101 :177–193, 2006.
 - [80] M. Lorenzo-Valdés, G.I. Sanchez-Ortiz, A.G. Elington, R.H. Mohiaddin et D. Rueckert. Segmentation of 4D cardiac MR images using a probabilistic atlas and the EM algorithm. *Medical Image Analysis*, 10 :286–303, 2006.
 - [81] H. van Assen, M.G. Danilouchkine, A.F. Frangi, S. Ordàs, J.J.M. Westenberg, J.H.C. Reiber et B.P.F. Lelieveldt. SPASM : A 3D-ASM for segmentation of sparse and arbitrarily oriented cardiac MRI data. *Medical Image Analysis*, 10 :286–303, 2006.
 - [82] J.K. Udupa, V.R. LeBlanc, Y. Zhuge, C. Imielinska, H. Schmidt, L.M. Currie, B.E. Hirsch et J. Woodbrun. A framework for evaluating image segmentation algorithms. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 30 :75–87, 2006.
 - [83] G. Bertrand. On the dynamics. *Image and Vision Computing*, 25(4) :447–454, 2007.
 - [84] L. Najman, G. Bertrand, M. Couprie et J. Cousty. Discrete region merging and watersheds. *Acta series of Uppsala University*, 2007. à paraître.
 - [85] M. Couprie, D. Coeurjolly et R. Zrou. Discrete bisector function and Euclidean skeleton in 2D and 3D. *Image and Vision Computing*, 25(10) :1543–1556, 2007.
 - [86] L. Najman, J. Cousty, M. Couprie, H. Talbot, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen et J. Garot. An open, clinically-validated database of 3D+t cine-MR images of the left ventricle with associated manual and automated segmentations. *Insight Journal*, 2007. special issue entitled ISC/NA-MIC Workshop on Open Science at MICCAI 2007.
 - [87] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie et L. Najman. Fusion graphs : merging properties and watersheds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2008. accepté, également dans rapport technique Institut-Gaspard-Monge IGM 2005-04, voir aussi Annexe 1.

Articles soumis

- [88] G. Bertrand. On critical kernels. *rapport technique Institut-Gaspard-Monge IGM 2005-05*, 2006. soumis pour publication en revue.
- [89] G. Bertrand et M. Couprie. Two-dimensional thinning algorithms based on critical kernels. *rapport technique Institut-Gaspard-Monge IGM 2006-02*, 2006. soumis pour publication en revue.
- [90] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman et G. Bertrand. Weighted fusion graphs : merging properties and watersheds. 2007. soumis pour publication en revue, voir aussi annexe 2.
- [91] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman et M. Couprie. Watersheds, minimum spanning forest and the drop of water principle. *Technical report IGM-2007-01*, 2007. soumis pour publication en revue, voir aussi annexe 3.
- [92] J. Cousty, L. Najman, M. Couprie, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen et J. Garot. Automated accurate and fast segmentation of 4D cardiac MR images based on discrete mathematical morphology. 2007. soumis pour publication en revue, voir aussi annexe 4.

Communications dans une Conférence

- [93] H. Digabel et C. Lantuéjoul. Iterative algorithms. Dans *Proc. 2nd European Symp. Quantitative Analysis of Microstructures in Material Science, Biology and Medicine*, pages 85–99, 1978.
- [94] S. Beucher et C. Lantuéjoul. Use of watersheds in contour detection. Dans *Proc. of the International Workshop on Image Processing Real-Time Edge and Motion Detection/Estimation*, 1979.
- [95] F. Meyer. Un algorithme optimal de ligne de partage des eaux. Dans *Actes du 8ème Congrès AFCET*, pages 847–859, Lyon-Villeurbanne, France, 1991.
- [96] M. Grimaud. New measure of contrast : dynamics. Dans P. Gader, E. Dougherty et J. Serra, editors, *Image algebra and morphological image processing III*, volume SPIE-1769, pages 292–305, July 1992.
- [97] E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, P.D. Seymour et M. Yannakakis. Complexity of multiway cuts. Dans *Proc. of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 241–251, 1992.
- [98] S. Beucher. Watershed, hierarchical segmentation and waterfall algorithm. Dans *Proc. of the second international conference on Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 69–76, 1994.
- [99] F. Meyer. Minimum spanning forests for morphological segmentation. Dans *Proc. of the second international conference on Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 77–84, 1994.
- [100] A. Anderson, T. Hagerup, S. Nilson et R. Raman. Sorting in linear time? Dans *STOC : ACM Symposium on Theory of Computing*, 1995.
- [101] A. N. Moga, T. Viero, M. Gabbouj, M. Nölle, G. Schreiber et H. Burkhardt. Parallel watershed algorithm based on sequential scanning. Dans *Proc. of IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 1995.

-
- [102] F. Meyer. The dynamics of minima and contours. Dans *ISMM 3rd, Comp. Im. and Vision*, pages 329–336. Kluwer Ac. Pub., 1996.
- [103] M. Thorup. On RAM priority queues. Dans *Proc. of the 7th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 59–67, 1996.
- [104] M. Couprie et G. Bertrand. Topological grayscale watershed transform. Dans *Proc. of SPIE Vision Geometry V*, volume 3168, pages 136–146, 1997.
- [105] R. Lotufo et A. Falcão. The ordered queue and the optimality of the watershed approaches. Dans *Proc. of the 5th International Symposium on Mathematical Morphology*, pages 341–350, 2000.
- [106] A. Meijster, J.B.T.M. Roerdink et W.H. Hesselink. A general algorithm for computing distance transforms in linear time. volume 18 of *Computational Imaging and Vision*, pages 331–340. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [107] N. Aspert, D. Santa-Cruz et T. Ebrahimi. MESH : measuring errors between surfaces using the Hausdorff distance. Dans *Proc. IEEE International Conference in Multimedia and Expo*, volume 1, pages 705–708, 2002.
- [108] C. Doublier, M. Couprie, J. Garot et Y. Hamam. Computer assisted segmentation, quantification and visualization of an infarcted myocardium from MRI images. Dans *Proc. Biomedsim'03*, pages 151–156, 2003.
- [109] X. Daragon, M. Couprie et G. Bertrand. Discrete frontiers. Dans *Discrete geometry for computer imagery*, volume 2886 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 236–245. Springer, 2003.
- [110] L. Brun, M. Mokhtari et F. Meyer. Hierarchical watersheds within the combinatorial pyramid framework. Dans *Proc. of 12th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS 3429, pages 34–44, 2005.
- [111] J. Cousty, G. Bertrand, M. Couprie et L. Najman. Fusion graphs, region merging and watersheds. Dans *Proc. of the 13th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS 4245, pages 343–354, 2006.
- [112] J. Cousty, M. Couprie, L. Najman et G. Bertrand. Grayscale watersheds on perfect fusion graphs. Dans *Proc. of the 11th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, volume LNCS 4040, pages 60–73, 2006.
- [113] R. Audigier et R. A. Lotufo. Duality between the watershed by image foresting transform and the fuzzy connectedness segmentation approaches. Dans *Proc. of the XIX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI)*, pages 53–60, 2006.
- [114] G. Bertrand et M. Couprie. New 3d parallel thinning algorithms based on critical kernels. Dans *Proc. 13th International Conference on Discrete geometry for computer imagery*, volume LNCS 4245, pages 580–591, 2006.
- [115] G. Bertrand et M. Couprie. New 2d parallel thinning algorithms based on critical kernels. Dans *Proc. 11th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*, volume LNCS 4040, pages 45–59, 2006.
- [116] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman et M. Couprie. Watershed cuts. Dans *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and Image Processing, proc. 8th International Symposium on Mathematical Morphology*, pages 301–312, 2007.
- [117] C. Allène, J-Y. Audibert, M. Couprie, J. Cousty et R. Keriven. Optimal structures in graph segmentation. Dans *Mathematical Morphology and its Applications to Signal and*

Image Processing, proc. 8th International Symposium on Mathematical Morphology, pages 253–264, 2007.

- [118] J. Cousty, L. Najman, M. Couprie, S. Clément-Guinaudeau, T. Goissen et J. Garot. Automated accurate and fast segmentation of 4D cardiac MR images. Dans *Proc. of Functional Imaging and Modeling of the Heart*, volume 4466, pages 474–483. Springer-Verlag, 2007.

Index

adjacence	7	composante (connexe)	8, 9
26-adjacence	38	connexion	10
4-adjacence	9, 38	connexité	7, 8
6-adjacence	38	connexité floue	72
8-adjacence	9, 38	coupure	60
entre ensembles	29	par bassin	62
altitude	14	par bord	65, 68
d'une arête	59	par flux	71
d'un sommet	14	algorithme	72, 83
amincissement		par FPCC	74
par bord	65	par FPM	63
par M-bord	67	par inondation	68
analyse d'image	1	par LPE	61, 68, 71, 75
arête	7	algorithme	69, 72, 83
adjacente	10	consistance	62
d'inondation	68	optimalité	63
de bord	65	par M-bord	67, 68
intérieure	65	topologique	75
localement séparante	64	cubes balladeurs	93
M-bord	67	délinéation	2, 89
sortante	10	degré de connexité	22
arbre	63	dilatation géodésique	88
de poids minimum	63	dilatation repoussée	88
bassin d'attraction	62	distance topographique	16
par inondation	17, 18	division de régions	35
topographique	16	endocarde	86
C-amincissement	50	ensemble F-simple	32
C-ligne de partage des eaux	50	épicarde	86
algorithme	51	extension	
topologique	53	d'un ensemble	19
chemin	8, 10	d'un graphe	59
descendant	16, 53, 61	famille de flux	71
de plus grande pente	16, 62	fermeture (morphologique)	90
ciné-IRM	91	filtre alterné séquentiel	90
clivage	11, 12	flux	70
co-extension		\prec -flux	70
d'une fonction	19, 21	forêt	63
d'un ensemble	19	relative	62

forêt couvrante de poids minimum (FPM) relative.....	63	algorithme.....	69
algorithme.....	63	ouverture (morphologique).....	90
forêt couvrante relative.....	63	P2S : mesure point-surface.....	93
forêt de plus courts chemins relative (FPCC).....	74	poids d'un graphe.....	63
fraction d'éjection.....	94	point.....	7
fusion de régions.....	27, 32, 33	de bord.....	29
graphe.....	7	F-simple.....	32
à arêtes valuées.....	59	falaise.....	49
d'arêtes.....	31, 75	intérieur.....	29
de fusion.....	33, 36	M-falaise.....	49
de fusion faible.....	33, 36	multiple.....	30
de fusion fort.....	34, 36	séparant.....	30
de fusion parfait.....	34, 37	unconnecté.....	11
induit.....	59	W-destructible.....	20, 50
spatio-temporel (3D+t).....	89	principe de la goutte d'eau.....	61
grille de fusion parfaite.....	39, 41	puits (d'un flux).....	70
imagerie 3D.....	1	régions fusionnables.....	33
inondation (d'une fonction).....	68	reconnaissance.....	2, 88, 89
intérieur.....		section.....	14, 59
d'une fonction.....	47	segmentation.....	1, 7
d'un ensemble.....	30	segmentation manuelle.....	91
isomorphiques (graphes).....	29	séparation.....	22
ligne de partage des eaux.....	12	forte.....	22
binaire.....	11	induite.....	23
en 4D.....	89, 95	sommet.....	7
inter-pixel (par inondation).....	17	source (d'un flux).....	70
par inondation (immersion).....	14, 15	sous-graphe.....	8
topographique.....	16	induit.....	9
topologique.....	18, 19, 21, 72, 75	squelette homotopique contraint.....	89
lissage.....	90	Transformée Image Forêt (IFT).....	72
masse myocardique.....	94	transformation homotopique.....	89
mince.....		valeur de connexion.....	21, 22, 73
pour une fonction.....	47	voisin.....	
pour un ensemble.....	30, 35	d'une région.....	33
minimum régional.....	14, 59	d'un point.....	7
monotonie.....	51	W-amincissement.....	
morphologie mathématique.....	5	d'une fonction.....	21, 22
myocarde ventriculaire gauche.....	86	d'un ensemble.....	12
noyau.....		par inondation.....	15
par bord.....	65, 68		
par inondation.....	68		
par M-bord.....	67, 68		

Résumé

La notion de clivage formalise l'idée d'ensemble frontière dans un graphe. Fusionner deux régions, comme le requièrent certaines méthodes de segmentation d'images, pose des difficultés. Nous introduisons quatre classes de graphes (de fusion) dans lesquels ces difficultés sont progressivement supprimées. Nous montrons que l'une de ces classes est celle pour laquelle tout clivage est mince. Nous introduisons une relation d'adjacence, appelée grille de fusion parfaite, dans laquelle deux régions voisines peuvent être fusionnées, en préservant toutes les autres régions.

La ligne de partage des eaux topologique (LPE) étend la notion de clivage aux graphes dont les sommets sont valués et permet de segmenter une image. Nous étendons les propriétés des clivages dans les graphes de fusion aux cas des fonctions et proposons un algorithme de LPE monotone et linéaire dans les grilles de fusion parfaites. Grâce à la notion de graphe d'arêtes, les propriétés des LPE dans les grilles de fusion parfaites s'étendent aux graphes à arêtes valuées.

Nous étudions en profondeur les LPE dans les graphes à arêtes valuées. Les LPE peuvent y être définies en suivant l'idée intuitive de gouttes d'eau s'écoulant sur un relief topographique. Nous établissons aussi bien la consistance que l'optimalité de cette définition. De plus, nous proposons deux algorithmes linéaires qui, à notre connaissance, sont les plus efficaces pour le calcul des LPE.

En nous reposant sur ces résultats théoriques, nous proposons une méthode et développons un logiciel pour la segmentation du ventricule gauche dans des images cardiaques 3D+t par résonance magnétique. La méthode est quantitativement et qualitativement validée par comparaison avec des segmentations manuelles tracées par deux experts cardiologues.

Mots-clés: segmentation d'image, ligne de partage des eaux, fusion de régions, imagerie cardiaque

Abstract

The notion of a cleft models a frontier in a graph. Merging two regions, as requested by some image segmentation methods, is not straightforward. We introduce four classes of (fusion) graphs in which these difficulties are progressively avoided. We show that one of these classes is the one in which any cleft is thin. We introduce an adjacency relation, called perfect fusion grid, in which any two neighboring regions can be merged while preserving all other regions.

The notion of a topological watershed (TW), used for image segmentation, extends the one of a cleft to vertex-weighted graphs. We extend the properties of clefts in fusion graphs to the case of maps and give a monotone linear-time watershed algorithm on perfect fusion grids. Thanks to line graphs, the properties of TWs in perfect fusion grids are extended to edge-weighted graphs.

We investigate in depth the watersheds in edge-weighted graphs. The watersheds can be defined following the intuitive idea of drops of water flowing on a topographic surface. We establish both watershed consistency and optimality. We propose two linear-time algorithms which are, to the best of our knowledge, the most efficient watershed algorithms.

Based on these results, we develop a software to automatically segment the left ventricular myocardium in 3D+t MR images. Quantitative and qualitative evaluations, based on the comparison with hand-made expert segmentations, assess the quality of the obtained segmentations.

Keywords: image segmentation, watershed, region merging, cardiac imagery